

N° d'ordre : 2400

Année 2006

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
TOULOUSE

École doctorale : **Informatique et Télécommunications**  
Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Romain DUJOL**

### **Contribution à l'étude du contrôle optimal des transferts orbitaux mono-entrée**

Soutenue publiquement le 23 Novembre 2006 devant le jury composé de :

Prof.	Joseph	NOAILLES	<i>Directeur de thèse</i>
Prof.	Moritz	DIEHL	<i>Rapporteur</i>
Prof.	Emmanuel	TRÉLAT	<i>Rapporteur</i>
Prof.	Bernard	BONNARD	<i>Examineur</i>
Dr.	Jean-Baptiste	CAILLAU	<i>Examineur</i>
Dr.	Richard	EPENY	<i>Examineur</i>



*À mes parents  
À mes grands-parents  
À Martin  
À Martine*

*Ce qui est créé par l'esprit est plus vivant que la matière.*  
Charles BAUDELAIRE, *Fusées* (1851)

*Les mathématiciens sont comme les Français : dès qu'on  
leur dit quelque chose, ils le traduisent dans leur langue,  
et cela devient tout autre chose.*  
Johan Wolfgang GÖTTE, *Maximes et Réflexions* (1833)



# Introduction

## Contexte de l'étude

Le présent rapport développe l'étude d'un problème de mécanique spatiale. Plus précisément, nous étudions le transfert d'un satellite d'une orbite à une autre, en nous restreignant aux trajectoires elliptiques autour de la Terre. Le problème de transfert orbital nous a été soumis par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) de Toulouse. En plus des études réalisées par le CNES lui-même [8, 36, 38] et de nombreux travaux extérieurs [7, 24, 49, 53, 54, 68] montrant l'intérêt scientifique d'un tel problème, le transfert orbital a été à l'origine de plusieurs contrats triennaux passés par le CNES avec l'équipe *Algorithmes Parallèles et Optimisation* et de nombreux rapports, articles et thèses ont été publiés. En particulier, deux thèses [26, 47] ont permis une étude très poussée du problème de transfert orbital en temps minimal aussi bien théoriquement que numériquement. Deux autres thèses [41, 50] ont par la suite traité le problème en consommation minimale en tirant parti de la puissance des méthodes homotopiques [5, 67].

Comme dans les études précédentes, notre étude met à profit la théorie du contrôle optimal [32, 48] et son fameux principe du maximum de PONTRYAGIN [56]. Nous nous consacrerons plus particulièrement à l'utilisation des outils géométriques appliqués à la théorie du contrôle [1, 23, 43, 46].

Nos travaux s'inscrivent ainsi dans l'étude des conditions d'optimalité, avec par exemple les principes du maximum d'ordre supérieur [25, 45] ou l'analyse de formes quadratiques [3, 58, 63]. Suite aux nombreuses études effectuées sur le transfert orbital, nous avons choisi de nous attacher à une configuration particulière : le transfert dit *mono-entrée*. Dans une telle configuration, la poussée est uniquement dirigée selon la vitesse instantanée du satellite. De manière générale, l'étude d'un système de contrôle mono-entrée requiert une attention particulière ainsi que le montrent les études de Hector SUSSMANN dans le plan [65, 66] puis les études réalisées en dimension trois [2, 10, 60]. En effet, les contrôles optimaux peuvent être “bang-bang” et il faut alors formuler d'autres résultats et d'autres conditions (cf. [2, 61] dans  $\mathbf{R}^3$  et [4, 59, 64] dans le cas général). Notons que le problème de transfert orbital est, comme nous le verrons plus tard, un problème en dimension quatre au moins.

## Organisation du rapport

Ce rapport est divisé en trois parties :

1. La première partie intitulée **Modèle et conditions d’optimalité** contient trois chapitres :
  - le **Chapitre 1** présente le problème de transfert orbital dans son ensemble ;
  - le **Chapitre 2** rappelle et développe les conditions d’optimalité au premier et au second ordre dans le cadre général d’un problème de contrôle quelconque ;
  - le **Chapitre 3** revient sur le problème de transfert orbital vu comme problème de contrôle optimal et applique les résultats du chapitre précédent.
2. La seconde partie intitulée **Moyennation** développe la technique de moyennation (introduite pour le cas particulier du transfert orbital dans [37]) et contient deux chapitres :
  - le **Chapitre 4** présente le problème de minimisation de l’énergie du transfert orbital qui sera plongé dans un contexte sous-Riemannien [22], généralisation du cadre Riemannien ;
  - le **Chapitre 5** présente les simulations numériques réalisées.
3. La troisième et dernière partie intitulée **Homotopies lisses** développe les régularisations du problème mono-entrée par l’outil homotopique [5] et contient deux chapitres :
  - le **Chapitre 6** présente les processus régularisants utilisés et analyse leur pertinence ;
  - le **Chapitre 7** utilise les processus introduits dans le chapitre précédent et étudie les résultats obtenus.

Enfin, l’**Annexe A** présente une méthode constructive de génération de transferts sous-optimaux à partir de [31].

## Contributions

Le transfert mono-entrée est un problème nouveau et n’avait pas encore été étudié auparavant. Ce problème est lié à l’étude de la contrainte de cône [41] dont il est le cas limite. Le transfert mono-entrée est physiquement intéressant à de nombreux titres. La réduction des degrés de liberté de la poussée n’affecte en rien les propriétés de contrôlabilité du transfert et les résultats obtenus montrent que l’on observe une faible dégradation du temps de transfert par rapport au transfert coplanaire bi-entrées.

Le contrôle optimal est discontinu ou “ bang-bang ”, ce qui constitue une différence majeure avec les études précédentes sur le temps minimal sans contrainte sur la *direction* de poussée. Cela nous amène à considérer des approximations lisses du transfert mono-entrée. Une approximation Riemannienne est obtenue en considérant le transfert moyenné avec minimisation de l’énergie (*i.e.* norme  $L^2$  du

contrôle) où la contrainte sur le contrôle est relaxée. Nous connectons également le transfert mono-entrée avec des transferts bi-entrées connus : la contrainte de contrôle reste, mais les contrôles obtenus dans de tels cas sont lisses.

Pour chacune de ces approximations, une analyse fine de l'optimalité est réalisée. L'étude de la métrique Riemannienne du transfert moyenné est faite et met en évidence le caractère plat des transferts vers les orbites circulaires (dont les orbites géostationnaires sont des exemples) : dans des coordonnées adaptées, les trajectoires minimisantes sont des *droites*. On étudie également les conditions du deuxième ordre de type point conjugué sur les homotopies lisses.

## Collaborations et financements

Ce travail a été réalisé dans l'équipe *Algorithmes Parallèles et Optimisation* de l'ENSEEIH-IRIT (IRIT : *Institut de Recherche en Informatique de Toulouse*, UMR CNRS 5505) et financé par une allocation de recherche du Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Ce travail a été effectué en partie dans le cadre d'un contrat avec le Centre National d'Études Spatiales (contrat 02/CNES/0257/00) et dans le cadre du réseau d'excellence HYCON<sup>1</sup> (contrat FP6-IST-511368).

Dans le cadre du programme européen *Control Training Site* (action Marie-Curie, [www.mc-cts.org](http://www.mc-cts.org)), j'ai bénéficié de trois mois (novembre 2004, décembre 2004 et janvier 2005) de formation à la *Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati* de Trieste en Italie. Toujours dans le cadre du programme CTS, j'ai également bénéficié d'une formation intensive d'une semaine en contrôle optimal non-linéaire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées à Paris en février 2005.

---

<sup>1</sup>pour HYbrid CONtrol, [www.ist-hycon.org](http://www.ist-hycon.org)





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Modèle et conditions d’optimalité</b>	<b>11</b>
<b>1 Le problème de transfert orbital</b>	<b>13</b>
1.1 Modèle . . . . .	13
1.2 Problèmes de transfert orbital . . . . .	13
1.3 Les deux problèmes physiques . . . . .	14
<b>2 Les conditions nécessaires d’optimalité</b>	<b>17</b>
2.1 Méthode indirecte . . . . .	17
2.2 Application du principe du maximum : calcul des extrémales en transfert orbital . . . . .	19
2.3 Conditions du second ordre. Équation de JACOBI . . . . .	23
<b>3 Transfert orbital : préliminaires géométriques</b>	<b>27</b>
3.1 Équation de KEPLER et coordonnées orbitales . . . . .	27
3.2 Le problème de contrôle . . . . .	29
<b>II Moyennation</b>	<b>39</b>
<b>4 Le problème de minimisation de l’énergie</b>	<b>41</b>
4.1 Le cadre sous-Riemannien . . . . .	41
4.2 La technique de moyennation . . . . .	42
4.3 Problème sous-Riemannien associé au moyenné . . . . .	44
4.4 Calcul du moyenné associé au transfert orbital . . . . .	44
<b>5 Mise en œuvre pratique et simulation</b>	<b>53</b>
5.1 Les restrictions . . . . .	53
5.2 La méthode de continuation . . . . .	54

<b>III Homotopies lisses</b>	<b>57</b>
<b>6 Les méthodes de continuation</b>	<b>59</b>
6.1 Principe . . . . .	59
6.2 Continuations utilisées . . . . .	60
6.3 Régularité du chemin de continuation . . . . .	62
<b>7 Mise en œuvre pratique et simulations</b>	<b>63</b>
7.1 Algorithme de continuation . . . . .	63
7.2 Résultats . . . . .	63
<b>Conclusion</b>	<b>75</b>
<b>Annexes</b>	<b>79</b>
<b>A Construction de transferts d'orbites sous-optimaux</b>	<b>79</b>
A.1 Construction des formes implicites . . . . .	79
A.2 Reconstruction de l'état à partir des formes implicites . . . . .	82
A.3 Mise en œuvre pratique et simulations . . . . .	87
<b>Liste des tableaux</b>	<b>93</b>
<b>Table des figures</b>	<b>96</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>
<b>Remerciements</b>	<b>103</b>
<b>Index</b>	<b>105</b>

## **Première partie**

# **Modèle et conditions d'optimalité**



# Chapitre 1

## Le problème de transfert orbital

### 1.1 Modèle

Soit  $(I, J, K)$  un repère Galiléen dont l'origine  $O$  est le centre de la Terre et  $(I, J)$  est le plan équatorial. Le satellite est assimilé à un point matériel de masse variable  $m(t)$  dont la position est notée  $q = (q_1, q_2, q_3)$ . La notation  $F(t)$  désigne la poussée dont l'amplitude est bornée,  $\|F(t)\| \leq F_{\max}$ , et on suppose que la direction de poussée est laissée libre. Si  $\mu$  est la constante de gravitation terrestre, le système s'écrit :

$$\ddot{q} = -\mu \frac{q}{\|q\|^3} + \frac{F}{m}, \quad (1.1)$$

$$\dot{m} = -\frac{F}{v_e}, \quad (1.2)$$

où  $v_e$  est la vitesse d'éjection des gaz. Le modèle donné par le système d'équations (1.1) est un système de KEPLER contrôlé. Pour l'étude géométrique du problème, on néglige la variation de masse (1.2) et le modèle est dit à *masse constante*. Dans le cadre de la poussée faible, l'action du contrôle  $F/m$  est petite devant le terme de gravitation  $-\mu q/\|q\|^3$ . En négligeant la variation de masse, on obtient un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \varepsilon \sum_{i=1}^3 u_i(t) F_i(x(t))$$

où  $x = (q, \dot{q})$  est l'état,  $\varepsilon$  est un petit paramètre et les  $u_i(t)$  sont les trois composantes du contrôle  $u(t)$  représentant la décomposition de la poussée selon les directions  $F_i = \partial/\partial \dot{q}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $\|u\| \leq 1$ .

### 1.2 Problèmes de transfert orbital

Le problème pratique du cahier des charges du CNES est de transférer le système d'une orbite basse et fortement elliptique à l'orbite géostationnaire. En poussée

faible, le temps de transfert est long et on observe une déformation lente des paramètres orbitaux décrivant les ellipses osculatrices.

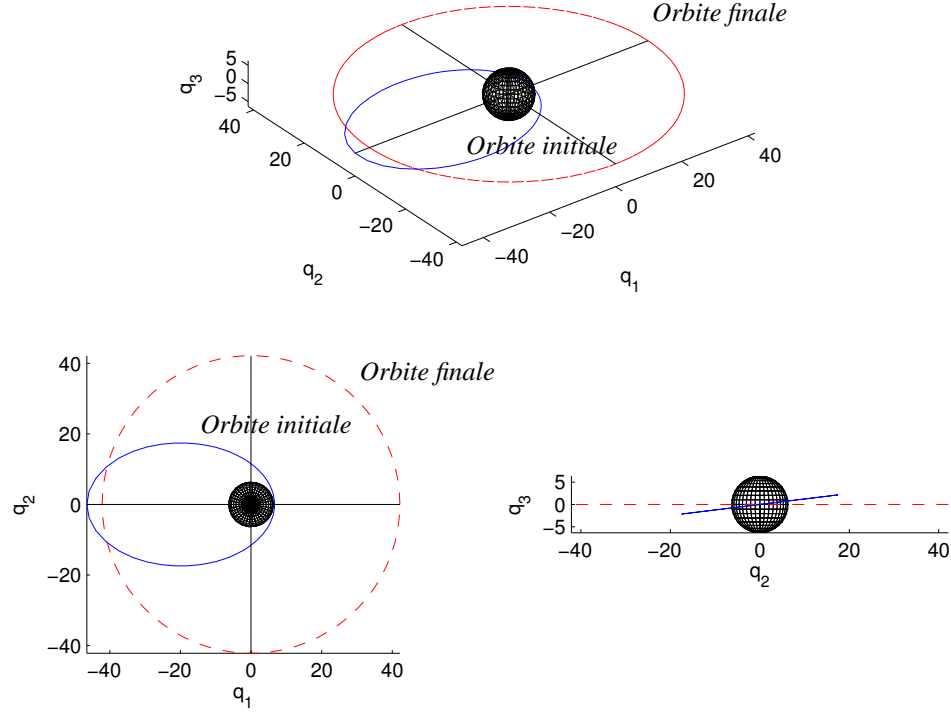


FIG. 1.1 – Orbites initiales et finales du transfert vers une orbite géostationnaire

La poussée est continue, mais de faible amplitude et donc  $\varepsilon$  est un petit paramètre d'où l'idée introduite dans [38] d'utiliser des *techniques de moyennation*.

### 1.3 Les deux problèmes physiques

Les deux critères physiques de coût sont :

**Temps minimal**  $\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T 1 dt$  où  $T$  est libre.

**Maximisation de la masse finale**  $\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T \|u(t)\| dt$  où  $T$  est fixé.

Dans le second cas, une approximation peut consister à remplacer la norme  $L^1$

du contrôle par la norme  $L^2$  :

$$\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$$

et à relaxer le contrôle  $\|u\| \leq 1$  en choisissant a posteriori un temps de transfert  $T$  suffisamment grand pour que le contrôle optimal vérifie naturellement la contrainte. On a donc un *problème de minimisation de l'énergie*, pour un système non linéaire.

Le lien avec la méthode de continuation se fait à deux niveaux. On peut commencer par effectuer une *continuation sur le paramètre de poussée*  $\varepsilon$  [26] car pour une poussée forte, la loi optimale est plus simple. Puis pour une valeur de  $\varepsilon$  donnée, on réalise une homotopie du critère  $L^2$  au critère  $L^1$  [40–42, 50], par exemple selon :

$$\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T \{ (1 - \lambda) \|u(t)\|^2 + \lambda \|u(t)\| \} dt.$$





## Chapitre 2

# Les conditions nécessaires d'optimalité via le principe du maximum

### 2.1 Méthode indirecte

Dans un contexte géométrique, le problème de contrôle optimal est analysé par la méthode dite indirecte : on utilise les conditions nécessaires du principe du maximum [32,48,56] pour sélectionner les trajectoires optimales parmi une famille de trajectoires *extrémales*, solutions d'un système Hamiltonien.

#### 2.1.1 Formulation du principe du maximum

On considère un système supposé lisse<sup>1</sup> de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

avec  $x \in \mathbf{R}^n$  et  $u(t) \in U$  domaine de contrôle ainsi qu'un critère à minimiser de la forme :

$$\text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$

et des conditions aux limites  $x(0) \in M_0$ ,  $x(T) \in M_1$  où  $M_0$  est la variété des conditions initiales et  $M_1$  est la variété cible.

On introduit le *pseudo-Hamiltonien* :

$$H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$$

où  $p \in \mathbf{R}^n$  est le *vecteur adjoint* et  $p^0$  une constante négative qui est la variable duale du coût. Si  $(x(\cdot), u(\cdot))$  est optimal sur  $[0, T]$ , il existe  $(p(\cdot), p^0) \neq 0$  tel que

---

<sup>1</sup>lisse au sens  $\mathcal{C}^\infty$

les équations (2.1-2.2) et la condition dite de maximisation (2.3) soient vérifiées presque partout sur  $[0, T]$  :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)) \quad (2.1)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) \quad (2.2)$$

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \text{Max}_{v \in U} H(x(t), p(t), v) \quad (2.3)$$

De plus  $M(x(t), p(t)) = \text{Max}_{v \in U} H(x(t), p(t), v)$  est constant et cette constante est nulle si le temps de transfert est libre.

Enfin le système vérifie les conditions de transversalité : à l'instant initial,  $p(0)$  est perpendiculaire à l'espace tangent de  $M_0$  en  $x(0)$  et à l'instant final,  $p(T)$  est perpendiculaire à l'espace tangent de  $M_1$  en  $x(T)$ .

**Définition 2.1 (Extrémale).** On appelle extrémale (respectivement BC-extrémale) un triplet  $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$  solution des équations précédentes (respectivement des équations précédentes et des conditions de transversalité).

### 2.1.2 Mise en œuvre pratique : la méthode de tir

Le calcul de la loi optimale en utilisant le principe du maximum est fondé sur le principe suivant :

**Étape 1** En un point  $(x(t), p(t))$  de la trajectoire, on calcule le contrôle avec la condition de maximisation. Ce contrôle s'exprime comme un feedback dynamique (fonction en général multi-valuée)  $u(t) = \hat{u}(x(t), p(t))$ .

**Étape 2** Dans le cas où la condition de maximisation conduit à un contrôle unique  $\hat{u}(x, p)$ , on définit un vrai Hamiltonien  $\hat{H}(x, p) = H(x, p, \hat{u}(x, p))$  qui définit par intégration les trajectoires optimales. On applique une méthode de tir, pour calculer le vecteur adjoint initial  $p_0 = p(0)$ , qui doit vérifier les conditions de transversalité. Pour le calcul de  $p_0$ , on doit donc résoudre une équation de tir (non linéaire)  $S(p_0) = 0$ . Le problème est bien posé car le nombre d'équations de tir coïncide avec le nombre d'inconnues.

### 2.1.3 Lien avec la méthode de continuation

Si l'on veut converger vers la solution, la résolution de l'équation par une méthode de type NEWTON nécessite d'avoir une bonne approximation du vecteur  $p(0)$  initial. Pratiquement, on effectue souvent le calcul en immergeant le problème dans une famille de problèmes à un paramètre  $\lambda$  où l'équation de tir s'écrit  $S_\lambda(p_0) = 0$ , par exemple  $\lambda = \varepsilon$ , module de la poussée, ou en prenant un coût  $\int_0^T \{(1 - \lambda)\|u(t)\|^2 + \lambda\|u(t)\|\} dt$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  pour le transfert orbital.

## 2.2 Application du principe du maximum : calcul des extrémales en transfert orbital

### 2.2.1 Temps minimal

Afin de simplifier les calculs, on suppose que la masse est constante. Le système est de la forme :

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) F_i(x(t))$$

et  $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq 1$ . On note  $P_i$  les Hamiltoniens  $P_i(x, p) = \langle p, F_i(x) \rangle$  et le pseudo-Hamiltonien est :

$$H(x, p, u) = P_0(x, p) + \sum_{i=1}^m u_i P_i(x, p) + p^0 \cdot 1$$

avec  $\|u\| \leq 1$ . On note  $\Sigma$  la surface de commutation définie par :

$$\Sigma = \{(x, p) \mid \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, P_i(x, p) = 0\}.$$

En dehors de  $\Sigma$ , la condition de maximisation donne clairement :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \hat{u}_i(x, p) = \frac{P_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m P_i^2}}$$

et les trajectoires extrémales associées sont des solutions du système Hamiltonien défini par le Hamiltonien  $\hat{H}$  où :

$$\hat{H}(x, p) = P_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^m P_i^2}.$$

est le Hamiltonien réduit propre au temps minimal.

Ces extrémales sont donc lisses. Pour avoir toutes les extrémales, il faut aussi étudier celles contenues dans  $\Sigma$  et les jonctions possibles entre les trajectoires de  $\hat{H}$  en passant par  $\Sigma$ .

On utilise ici le principe du maximum pour réaliser la *stratification des trajectoires extrémales*.

### 2.2.2 Minimisation de l'énergie

On suppose ici que la masse est constante. Le pseudo-Hamiltonien associé est :

$$H(x, p, u) = P_0 + \sum_{i=1}^m u_i P_i + p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2.$$

On a deux cas :

- le cas *normal* où  $p^0 < 0$  et par homogénéité, on peut utiliser la normalisation  $p^0 = -1/2$  ;
- le cas *anormal* où  $p^0 = 0$ .

Dans le cas normal, la condition de maximisation de  $H$  en  $u$  avec  $u \in U = \mathbf{R}^m$  donne  $\partial H / \partial u = 0$ , et  $\partial H / \partial u_i = 0$  implique  $u_i = P_i$ . On obtient donc dans ce cas le vrai Hamiltonien :

$$\hat{H}(x, p) = P_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i^2. \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Cas de maximisation de la masse

*Remarque 2.1.* Bien que le principe du maximum soit formulé page 17 pour un système lisse, seule la continuité par rapport au contrôle est effectivement requise, ce qui est le cas ici.

Dans ce cas, il faut prendre en compte l'équation de la variation de la masse (1.2) page 13 et la condition de maximisation est plus complexe et conduit à une politique de contrôle dont la caractéristique est d'avoir une concaténation de contrôles où la **poussée est maximale** ou **nulle**, ceci donnant donc, même génériquement, un **contrôle optimal discontinu**, ce qui affecte numériquement la méthode de tir. Les calculs sont extraits de [41] et sont les suivants. Le système est décomposé en :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -\mu \frac{q}{\|q\|^3} + u \frac{\varepsilon}{m}, \quad \|u\| \leq 1 \\ \dot{m} &= -\beta \varepsilon \|u\| \end{aligned}$$

et le critère est  $f_0 = \int_0^T \|u(t)\| dt$ . Le Hamiltonien se décompose en :

$$H = p^0 \|u\| - \beta \varepsilon \|u\| p_m + v p_q + \frac{\varepsilon}{m} \langle u, p_v \rangle - \frac{\mu}{\|q\|^3} \langle q, p_v \rangle.$$

Considérons le cas normal où  $p^0 \neq 0$ . En renormalisant  $p^0 = -1$ , on doit donc calculer pour  $\|u\| \leq 1$  le maximum de la fonction  $-\|u\| - \beta \varepsilon \|u\| p_m + \varepsilon \langle u, p_v \rangle / m$ .

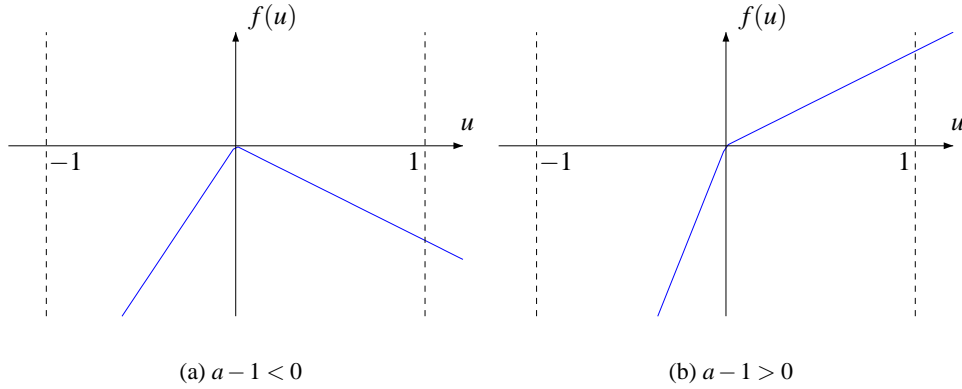
Regardons pour simplifier le cas scalaire avec  $p_v \neq 0$ . On a donc à maximiser une fonction du type  $f(u) = -|u| + au$  où on peut supposer  $a > 0$ . L'examen du graphe (voir FIG. 2.1) montre que si  $a - 1 > 0$ , le maximum est atteint pour  $u = 1$  et si  $a - 1 < 0$ , le maximum est atteint pour  $u = 0$ .

Dans le cas général, on pose  $\chi = -1 - \beta \varepsilon p_m + \varepsilon \|p_v\| / m$  et on a :

- si  $\chi > 0$ , le maximum est atteint pour  $u = p_v / \|p_v\|$ , la poussée étant **maximale** ;
- si  $\chi < 0$ , le maximum est atteint pour  $u = 0$  et c'est donc une poussée **nulle**.

#### 2.2.3.1 Preuve heuristique du principe du maximum de PONTRYAGIN

Pour comprendre le principe du maximum, on peut esquisser la preuve dans le cas suivant dit *faible*.

FIG. 2.1 – Graphe de la fonction  $u \mapsto -|u| + au$  sur  $[-1, 1]$ 

**Hypothèse.** Le domaine de commande  $U$  est tel que si  $u(\cdot)$  est un contrôle alors  $u(\cdot) + \delta u(\cdot)$  est admissible, où la variation  $\delta u(\cdot)$  est petite dans  $L^\infty([0, T], \mathbf{R}^m)$ .

C'est le cas en transfert orbital où  $U = \mathbf{R}^3$  pour le problème de minimisation de l'énergie et pour le problème de minimisation du temps où  $u \in U = \mathbf{S}^2$  (on passe en coordonnées locales).

*Esquisse de la preuve.* On considère :

$$\dot{x} = f(x, u), u \in U \quad , \quad \text{Min} \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt$$

On introduit le système augmenté dont l'état est  $\hat{x} = (x, x^0)$  avec  $\dot{x}^0 = f^0(x, u)$  et  $x^0(0) = 0$  que l'on écrit  $\hat{\dot{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$  et l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des applications mesurables bornées à valeurs dans  $U$ . On note  $\hat{x}(t, \hat{x}_0, u)$  la réponse et

$$\mathcal{A}(\hat{x}_0, T) = \bigcup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \hat{x}(T, \hat{x}_0, u)$$

l'ensemble des états accessibles à temps  $T$  du système augmenté.

Si la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimale, alors le point  $\hat{x}(T)$  final du système augmenté appartient à la frontière de  $\mathcal{A}(\hat{x}(0), T)$ . Fixons  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$  et  $T$  et introduisons l'application extrémité du système augmenté,  $\hat{E} : u(\cdot) \mapsto \hat{x}(T, \hat{x}_0, u)$ , de sorte que  $\hat{E}(\mathcal{U})$  soit exactement  $\mathcal{A}(\hat{x}(0), T)$ . Dans le cas où  $\hat{f}$  est lisse, d'après le théorème de l'application ouverte,  $\hat{E}$  est dérivable. De plus si la trajectoire associée à  $u(\cdot)$  est optimale, alors elle est extrémale dans le sens  $\text{rang } \hat{E}'_u < n + 1$  et  $\hat{E}'$  est la dérivée de FRÉCHET calculée pour la norme du sup.

Le calcul de la dérivée s'effectue comme suit. Pour alléger les notations, on remplacera  $\hat{x}$  par  $x$  (on notera  $n$  la dimension de  $x$ ) et  $\hat{f}$  par  $f$ . Ainsi  $x(\cdot)$  est la réponse à  $u(\cdot)$  et on note  $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$  la réponse à  $u(\cdot) + \delta u(\cdot)$  :

$$\dot{x} + \delta \dot{x} = f(x + \delta x, u + \delta u).$$

En identifiant les termes jusqu'au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ \dot{\delta x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\delta u,\end{aligned}$$

où la seconde équation est l'équation aux variations du système contrôlé. On a  $\delta x(0) = 0$  car  $x(0) = (x + \delta x)(0) = x_0$  et la solution s'écrit en  $t = T$  :

$$\delta x(T) = \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1} B(s) \delta u(\cdot) ds$$

où  $\Phi$  est la solution de l'équation  $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$  telle que  $\Phi(0) = \text{Id}$  et :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t)).$$

Dans le cas extrémal, on a  $\dim\{\Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1} B(s) \delta u(\cdot) ds\} < n$  et il existe un vecteur (ligne) **non nul**  $\bar{p} \in (\mathbf{R}^n)^*$  orthogonal à l'image de  $E'_u$  i.e. :

$$\bar{p} \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1} B(s) \delta u(\cdot) ds = 0$$

ce qui équivaut à :

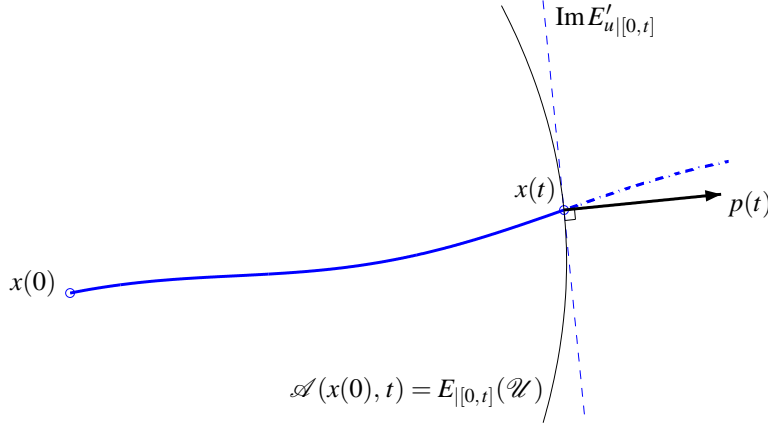
$$\bar{p} \Phi(T) \Phi(s)^{-1} B(s) = 0 \text{ presque partout.}$$

On introduit la fonction vectorielle (ligne)  $p : t \mapsto p(t) = \bar{p} \Phi(T) \Phi(t)^{-1}$ . En notant  $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$ , on obtient le principe du maximum dans sa version faible :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -p(t)A(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)) \\ 0 &= p(t)B(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)).\end{aligned}$$

□

*Remarque 2.2.* On obtient ici l'interprétation géométrique de  $p(t)$ . En notant  $E'_{u|_{[0,t]}}$  la dérivée où  $u$  est restreint à  $[0, t]$  avec  $t \leq T$ , le vecteur  $p(t)$  est orthogonal à l'image de cette dérivée (voir FIG. 2.2).


 FIG. 2.2 – Caractérisation géométrique de  $p(t)$ .

## 2.3 Conditions du second ordre. Équation de JACOBI

On peut observer que même dans le cas où le domaine de commande  $U$  est ouvert, la condition de maximisation de  $H$  conduit à  $\partial H / \partial u = 0$  de la version faible, mais de plus on obtient une condition du second ordre qui est la *condition de LEGENDRE* :  $\partial^2 H / \partial u^2 \leq 0$ . Cette condition est en général insuffisante pour conclure sur l'optimalité, lorsque le temps de transfert  $T$  est grand. On doit alors comme dans le calcul des variations classiques introduire un concept de *point conjugué*. C'est une notion qui s'introduit avec la *variation seconde de l'application extrémité* mais qui a aussi une *interprétation géométrique en utilisant le flot extrémal*. Pour simplifier la présentation, on se limite ici au problème du *temps minimal*, avec des hypothèses restrictives (l'extrémale de référence étant injective).

### 2.3.1 Hypothèses

On considère un système lisse de  $\mathbf{R}^n$  :  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $u \in U$  et on suppose que le domaine de commande  $U$  est ouvert.

D'après l'analyse faite plus haut, dans le cas du temps minimal, si  $A(x_0, T)$  est l'ensemble des états accessibles en temps  $T$  du système, une trajectoire  $t \mapsto (x(t), u(t))$ ,  $t \in [0, T]$  minimale en temps est telle que pour  $0 < t \leq T$ ,  $x(t)$  appartient à la frontière de  $A(x_0, t)$ . De plus,  $u_{|[t_0, t_1]}$  est une singularité de l'application extrémité avec  $0 < t_0 < t_1 \leq T$  calculée avec  $x_0 = x(t_0)$  à l'instant  $t_1 - t_0$ . On note  $k(t_0, t_1)$  la codimension de la singularité. La première hypothèse est :

**Hypothèse 2.1.** *Le problème est fortement régulier, c'est-à-dire que  $k(t_0, t_1) = 1$  pour  $0 < t_0 < t_1 \leq T$ .*

La seconde hypothèse consiste à renforcer la condition de LEGENDRE :

**Hypothèse 2.2.** Avec  $H(x, p, u) = p^0 \cdot 1 + \langle p, f(x, u) \rangle$ , la condition de LEGENDRE forte le long de  $(x(\cdot), u(\cdot))$  est vérifiée :

$$\partial^2 H / \partial u^2 < 0.$$

On peut alors résoudre  $\partial H / \partial u = 0$  avec le théorème des fonctions implicites et calculer localement un contrôle extrémal comme un feedback dynamique  $\hat{u}(x, p)$  et on note  $\hat{H}(x, p) = H(x, p, \hat{u}(x, p))$ . Cette résolution est locale et on doit aussi imposer que  $\hat{u}$  est un **maximum global de  $H$** .

**Hypothèse 2.3.** On est dans le cas normal, i.e.  $p^0 \neq 0$ .

### 2.3.2 Définitions

Sous les hypothèses précédentes, on introduit la définition suivante :

**Définition 2.2 (Dérivée seconde intrinsèque).** Soit  $E_{x_0, t}$  est l'application extrémité à l'instant  $0 < t \leq T$ . On appelle  $E_t''$  la dérivée seconde intrinsèque la restriction de la variation seconde au noyau de  $E_{x_0, t}'(u)$  (où  $u$  est le contrôle extrémal de référence) et projetée sur  $\{\text{Im } E_{x_0, t}'(u)\}^\perp$ .

Son calcul explicite est aisé avec l'évaluation de la variation seconde et  $\{\text{Im } E_{x_0, t}'(u)\}^\perp$  est un espace vectoriel de dimension un donné par  $\mathbf{R}p(t)$  d'après l'interprétation géométrique du vecteur adjoint (Remarque 2.2 page 22). On peut donner une première définition de la notion de point conjugué.

**Définition 2.3 (Point conjugué).** On appelle temps conjugué le long de l'extrémale de référence un instant  $0 < t_c \leq T$  où la dérivée seconde intrinsèque, vue en tant que forme quadratique, admet une valeur propre nulle. Le point  $x(t_c)$  s'appelle un point conjugué à  $x_0 = x(0)$ .

On présente maintenant la caractérisation géométrique.

**Définition 2.4 (Point conjugué géométrique).** Soit  $H(x, p)$  un Hamiltonien lisse et  $z(\cdot) = (x(\cdot), p(\cdot))$  une trajectoire de  $\vec{H}$  définie sur  $[0, T]$ . On appelle équation de JACOBI le long de  $z(\cdot)$  l'équation aux variations

$$\dot{\delta z}(t) = d\vec{H}(z(t)) \cdot \delta z(t).$$

Un champ de JACOBI est une solution non-triviale  $J(\cdot)$  de cette équation. En notant  $J(\cdot) = (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ , on dit que  $J$  est vertical à l'instant  $t$  si  $\delta x(t) = 0$ .

Le temps  $t_c$  et le point correspondant  $x(t_c)$  sont dits géométriquement conjugués à 0 et  $x(0)$  respectivement s'il existe un champ de JACOBI vertical aux instants  $t = 0$  et  $t = t_c$ .



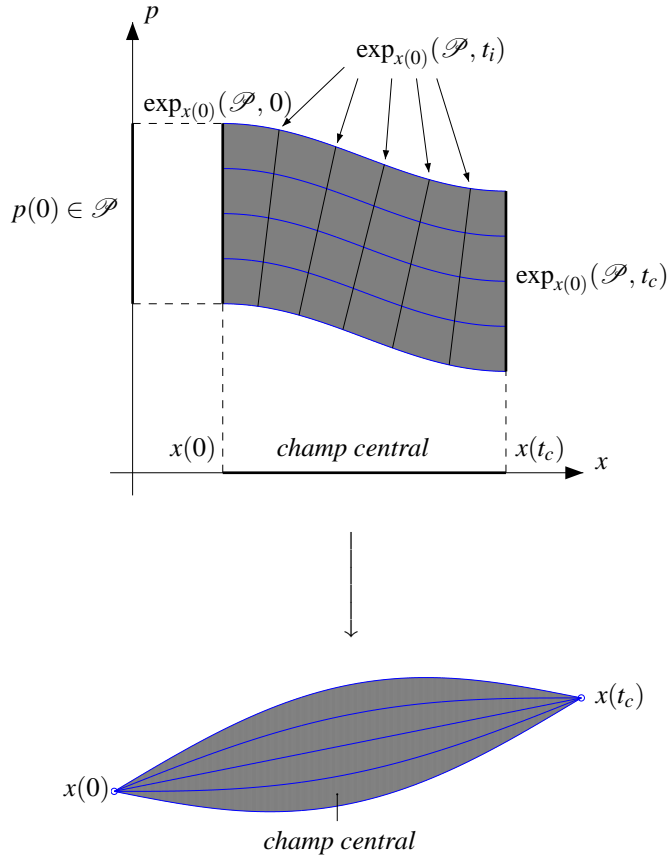


FIG. 2.3 – Point conjugué et champ central

**Définition 2.5 (Application exponentielle).** Soit  $H(x, p)$  un Hamiltonien lisse. On note  $\exp_{x_0} : (p, t) \mapsto x(t, x_0, p_0)$  l'application exponentielle définie sur un ouvert de  $T_{x_0}^*X \times \mathbf{R}$  où  $z(t, x_0, p_0) = (x(t, x_0, p_0), p(t, x_0, p_0))$  est la trajectoire de  $\vec{H}$  de condition initiale  $(x_0, p_0)$ . Son image s'appelle un champ central (voir FIG. 2.3).

On adopte la convention suivante. Le Hamiltonien du temps minimal qui s'écrit  $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0$  est identiquement nul car le temps de transfert est libre. Avec nos hypothèses on peut choisir  $p^0 = -1$  et le vecteur  $p$  est donc normalisé par la condition  $\langle p, f(x, u) \rangle = 1$ , ce qui restreint, pour tout temps  $t$ , le domaine de  $\exp_{x_0}(\cdot, t)$  et les variations  $\delta p(0)$  à une hypersurface de  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ . Les trois concepts précités sont alors reliés via le résultat suivant :

**Proposition 2.6.** Sous les hypothèses précédentes, la trajectoire  $x(t)$  est  $\mathcal{C}^0$ -optimale sur  $[0, T]$  si une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) Il n'existe pas de point conjugué sur  $[0, T]$ .
- (ii) Il n'existe pas de point conjugué géométrique sur  $[0, T]$ .

(iii) L'application  $\exp_{x_0}$  est une immersion.

De plus, si  $t > t_{1c}$  où  $t_{1c}$  est le premier temps conjugué, la trajectoire  $x(\cdot)$  n'est pas minimale en temps pour la topologie  $L^\infty$  sur l'espace des contrôles.

La justification de ce résultat technique se trouve dans [20]. Nous présentons ici l'algorithme pour calculer les points conjugués.

### 2.3.3 Algorithme

On choisit une base  $(e_i)_i$  de l'espace de dimension  $n - 1$  des champs verticaux en  $x_0$ . Soit  $J_i(\cdot) = (\delta x_i(\cdot), \delta p_i(\cdot))$  les champs de JACOBI associés à  $\delta p_i(0) = e_i$ . En dehors d'un point conjugué, le rang de  $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t))$  est  $n - 1$  et en un point conjugué, il est inférieur ou égal à  $n - 2$  : ce qui permet en particulier de calculer le *premier point conjugué* le long de notre extrémale de référence.

### 2.3.4 Champ central et fonction de tir

Un point important est que, sous les hypothèses précédentes, en immergeant la trajectoire extrémale de référence dans un champ central issu de  $x_0$ , on obtient l'optimalité au sens  $\mathcal{C}^0$ , mais aussi un estimé du tube  $\mathcal{T}$  où cette optimalité est vraie. Sur ce domaine, l'équation de tir  $S(p_0) = x_1$  admet une solution unique, calculée avec le théorème des fonctions implicites car le rang de  $S$  est maximum et le vecteur adjoint initial  $p(0)$  est une fonction lisse de  $x_1$ .

## Chapitre 3

# Transfert orbital : préliminaires géométriques

On va présenter les éléments fondamentaux du système décrivant le transfert orbital en poussée faible.

### 3.1 Équation de KEPLER et coordonnées orbitales

Le système libre est décrit par l'équation

$$\ddot{q} = -\mu \frac{q}{\|q\|^3}$$

et possède trois intégrales premières classiques :

- le moment cinétique  $c = q \wedge \dot{q}$  ;
- l'intégrale de LAPLACE  $L = -\mu \frac{q}{\|q\|} + \dot{q} \wedge c$  ;
- l'énergie  $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\mu}{\|q\|}$ .

On définit le vecteur excentricité  $\vec{e}$  par la relation  $L = \mu \vec{e}$ .

#### Proposition 3.1 (Propriétés du système).

- (i) On a  $\langle L, c \rangle = 0$ . Si  $c \neq 0$ ,  $L$  est contenu dans le plan du mouvement.
- (ii) On a  $L^2 = \mu^2 + 2Hc^2$ .
- (iii) Le cas  $c = 0$  correspond à une collision. Si  $c \neq 0$  :
  - soit  $L = 0$  et le mouvement est circulaire uniforme ;
  - soit  $L \neq 0$  et  $H < 0$ , la trajectoire est une ellipse donnée par :

$$|q| = \frac{c^2}{\mu + \|L\| \cos(\theta - \theta_0)},$$

avec  $\theta_0$  argument du périhélie.

On introduit le *domaine elliptique*  $\Sigma_e$  défini par  $c \neq 0$  et  $H < 0$ . En fixant  $(c, L)$  on obtient une unique orbite orientée. On a donc un système de coordonnées pour représenter les ellipses en utilisant  $(c, L)$ . En utilisant l'angle polaire, on repère le point sur l'ellipse.

En poussée faible, on a donc :

- les coordonnées  $(c, L)$  qui décrivent les paramètres de l'ellipse et qui *vont évoluer lentement* ;
- la variable angulaire qui représente la *variable rapide*.

**Paramètres orbitaux** On a une représentation plus détaillée [68] en introduisant (voir FIG. 3.1) :

- l'inclinaison  $i$  du plan orbital par rapport au plan équatorial ;
- l'angle  $\Omega$  entre  $I$  (premier axe du repère Galiléen géocentrique, cf. page 13) et le nœud ascendant ;
- la longitude  $l$  qui est l'angle entre le nœud ascendant et  $q$  position du satellite ;
- l'anomalie vraie  $v$  qui est l'angle entre  $\vec{e}$  et  $q$  (noté  $w$  dans la figure) ;
- l'angle  $\omega$  entre la ligne des nœuds et  $\vec{e}$ .

L'ellipse est caractérisée géométriquement par :

- le demi-grand axe  $a$  ;
- son excentricité  $e$ .

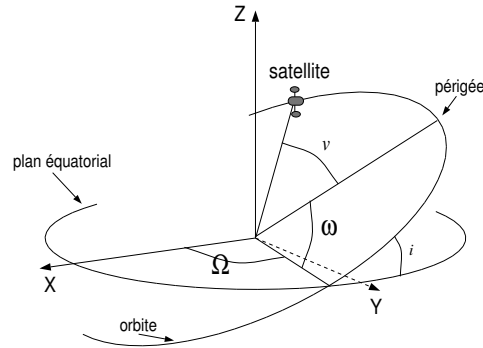


FIG. 3.1 – Éléments orbitaux

Le système de coordonnées est singulier dans deux cas :

- le mouvement est dans le plan équatorial ( $I, J$ ) : le transfert est dit *coplanaire* et  $i = 0$  ;
- le mouvement est circulaire :  $e = 0$ .

Dans tous les cas, on peut s'affranchir de ces singularités :

- dans le cas  $i = 0$ , on introduit le *vecteur inclinaison*  $h = (h_x, h_y)$  défini par :

$$h_x = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos \Omega, \quad h_y = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin \Omega$$

- dans le cas  $e = 0$ , on introduit le *vecteur excentricité*  $\vec{e} = (e_x, e_y)$  défini par :

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega), \quad e_y = e \sin(\omega + \Omega)$$

### 3.2 Le problème de contrôle

En dehors d'une collision où  $c = q \wedge \dot{q} = 0$ , on peut décomposer la poussée dans un repère mobile, des choix standards étant le repère *tangentiel-normal* ou le repère *radial-orthoradial*. Dans le premier cas, on écrit  $F = u_t F_t + u_n F_n + u_c F_c$  avec (voir FIG. 3.2) :

- la direction tangentielle  $F_t = \frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$  ;
- la direction normale  $F_n = F_c \wedge F_t$  dans le plan osculateur ;
- la direction hors-plan  $F_c = \frac{q \wedge \dot{q}}{\|q \wedge \dot{q}\|}$ , c'est-à-dire perpendiculaire au plan osculateur.

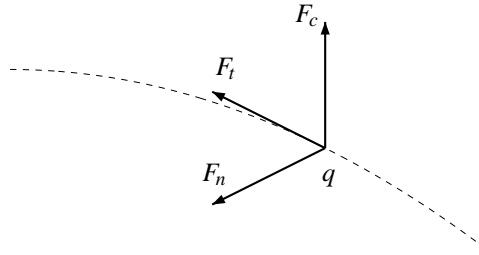


FIG. 3.2 – Repère tangentiel-normal

Le repère  $(F_n, F_t, F_c)$  est orthonormé direct et la contrainte sur le module de la poussée se traduit par  $(u_t^2 + u_n^2 + u_c^2)^{1/2} \leq F_{\max}$ . La construction du repère radial-orthoradial est similaire avec  $F_r = (q/\|q\|)\partial/\partial q$  orienté selon le rayon vecteur  $(O, q)$  (voir FIG. 3.3).

**Cas coplanaire** Le cas coplanaire (ou 2D) est le cas où la composante  $u_c$  est nulle et le satellite est astreint au plan osculateur fixe  $(q, \dot{q})$ . On a donc un système dans  $\mathbf{R}^4$  avec  $x = (q, \dot{q}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$  et on peut identifier le plan au plan équatorial  $(I, J)$ . La longitude  $l$  devient l'angle polaire, mesuré par rapport à  $I$ .

En choisissant des coordonnées orbitales et une décomposition du contrôle dans le repère tangentiel-normal ou radial-orthoradial, on obtient aisément les équations du système. Nous étudierons plus particulièrement l'action du contrôle limitée à la direction tangentielle  $F = u_t F_t + u_n F_n$  avec  $u_n = 0$ , qui correspond au cas *mono-entrée*. Dans ce cas, en utilisant le mouvement moyen  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  au lieu du

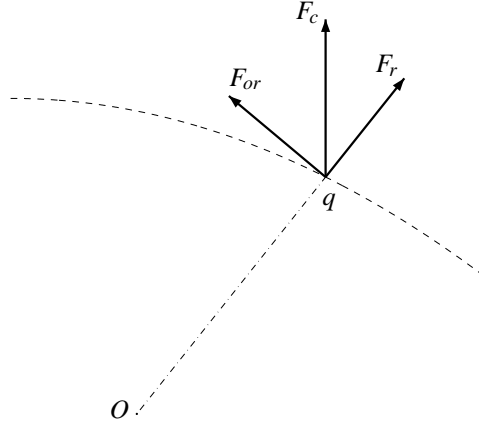


FIG. 3.3 – Repère radial-orthoradial

demi-grand axe  $a$ , les équations prennent la forme suivante [19, 37] :

$$\begin{aligned}\dot{n} &= -\frac{3n^{2/3}}{\mu^{1/3}} \sqrt{\frac{1+2e\cos v+e^2}{1-e^2}} u_t, \\ \dot{e} &= \frac{2(e+\cos v)}{(\mu n)^{1/3}} \sqrt{\frac{1-e^2}{1+2e\cos v+e^2}} u_t, \\ \dot{\omega} &= \frac{2\sin v}{(\mu n)^{1/3}e} \sqrt{\frac{1-e^2}{1+2e\cos v+e^2}} u_t, \\ \dot{l} &= \frac{n(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

où  $v = l - \omega$  est la longitude vraie. La singularité  $e = 1$  correspond aux trajectoires paraboliques, qui forment le bord du domaine elliptique  $\Sigma_e$ . La singularité  $e = 0$  est liée au choix des coordonnées et correspond aux trajectoires circulaires.

### 3.2.1 Forme générale du système

Le système associé au transfert orbital est de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= uF(x, l), \\ \dot{l} &= g_0(x, l),\end{aligned}$$

où  $u = u_t$ ,  $x = (n, e, \omega) \in X$  et l'angle  $l \in \mathbf{S}^1$ .

Dans le domaine elliptique, la vitesse angulaire  $g_0$  ne s'annule pas et on peut paramétrer les courbes par la *longitude cumulée* :

$$\frac{dx}{dl} = u \frac{F(x, l)}{g_0(x, l)}, \quad x \in X$$

où  $F$  et  $g_0$  sont des fonctions lisses et  $2\pi$ -périodiques. De façon plus générale, par exemple si  $u_n \neq 0$ , le système prend la forme d'un système multi-entrées  $2\pi$ -périodiques de la forme :

$$\frac{dx}{dl} = \sum_{i=1}^m u_i G_i(x, l), \quad (x, l) \in X \times \mathbf{S}^1.$$

### 3.2.2 Le problème de contrôlabilité

Avant d'analyser le problème optimal, on peut étudier le problème de contrôlabilité du système restreint au domaine elliptique  $\Sigma_e$  où toutes les trajectoires du système libre (*i.e.* sans intervention de la commande) sont périodiques. Reprenons l'étude du cas mono-entrée où le contrôle est uniquement orienté selon  $F_t$  : on a donc un système de la forme  $\dot{x} = F_0(x) + u_t F_t(x)$ ,  $|u_t| \leq F_{\max}$ .

Si  $F$  et  $G$  sont deux champs de vecteurs lisses, on définit le crochet de LIE  $[F, G](x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x)G(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x)F(x)$ . Pour étudier la contrôlabilité du système, on peut supposer que le contrôle est constant par morceaux et prend les valeurs  $-F_{\max}$  ou  $F_{\max}$  : de tels contrôles sont dits *bang-bang*. Par un résultat classique [43], comme les trajectoires de  $F_0$  sont toutes périodiques et  $F_0$  et  $F_t$  sont analytiques sur  $\Sigma_e$ , on a le résultat suivant.

**Proposition 3.2 (Caractérisation de la contrôlabilité).** *Le système est contrôlable avec des contrôles constants par morceaux à valeurs dans  $\{-F_{\max}, F_{\max}\}$  si et seulement si la dimension de l'algèbre de LIE engendrée par  $\{F_0, F_t\}$  est de dimension quatre.*

*Remarque.* Rappelons que nous nous plaçons dans un cadre strictement Képlerien. Si l'on prend en compte les phénomènes perturbateurs comme l'influence de l'aplatissement des pôles terrestres (terme en “  $J_2$  ”) ou encore l'influence de la Lune ou du Soleil, alors ces perturbations introduisent un décalage de l'inclinaison de l'orbite. Lors d'une absence de composante hors-plan de la poussée ( $u_c$ ) comme c'est le cas pour les transferts bi-entrée coplanaire et mono-entrée, il est alors impossible de corriger le décalage d'inclinaison et la propriété de contrôlabilité n'est plus valable.

Par un calcul simple, on montre que la condition est vérifiée. Plus précisément, les champs  $F_0$ ,  $F_t$ ,  $[F_0, F_t]$  et  $[F_0, [F_0, F_t]]$  sont indépendants et forment un repère, en tout point  $x$  du domaine elliptique.

Géométriquement, cela signifie que l'on peut joindre deux points quelconques du domaine elliptique avec une concaténation d'arcs issus des deux champs  $F_0 + u_t F_t$  où  $u_t = \pm F_{\max}$  parcourus en des temps positifs ; ce qui assure a fortiori la possibilité de réaliser le transfert d'orbite où l'on ne contrôle pas la longitude finale. Ce résultat suggère donc une étude géométrique non triviale intéressante physiquement, car en appliquant  $u_t = -F_{\max}$  qui s'oppose à la vitesse on dissipe l'énergie du système, au contraire du contrôle  $u_t = +F_{\max}$ .

*Remarque 3.1.* Ce résultat et son application sont généraux mais ne sont pas constructifs. Dans le cas très particulier du transfert d'orbite, il est possible de développer une méthode de génération de transferts d'orbites : ils sont évidemment sous-optimaux, mais leur performance reste acceptable. Cette méthode est présentée dans l'**Annexe A** page 79.

Les techniques géométriques permettent d'analyser en détail la structure de l'ensemble des états accessibles en temps petit, cette étude étant liée au problème du temps minimal. Cette étude est aisée dans le cas qui nous intéresse, lorsque la poussée est uniquement orientée le long de  $F_t$ . En effet, le calcul montre que  $[F_t, [F_0, F_t]]$  appartient à l'espace engendré par  $F_0, F_t$  et  $[F_0, F_t]$ , ce qui permet de montrer le résultat suivant [20] :

**Proposition 3.3.** *Chaque trajectoire temps-minimale du système  $\dot{x} = F_0 + u_t F_t$ ,  $u_t \leq F_{max}$  est bang-bang.*

*Esquisse de l'analyse des extrémales.* On définit la fonction de commutation  $\Phi$  par  $\Phi : t \mapsto \langle p(t), F_t(x(t)) \rangle$ . Une extrémale est dite *singulière* si la condition de maximisation ne permet de retrouver la commande optimale : donc notre cas, cela revient à la nullité de  $\Phi$  le long de ladite extrémale. Une extrémale *régulière* admet presque partout  $\hat{u} = \text{sign } \Phi$  comme commande optimale.

En utilisant la classification introduite dans [20], on montre que les extrémales singulières sont d'ordre minimal et elliptiques. Donc elles sont maximisantes en temps.

L'analyse de la structure de l'algèbre de LIE montre que les extrémales régulières d'ordre deux<sup>1</sup> sont nécessairement paraboliques ou elliptiques. Dans le cas d'extrémales paraboliques, il y a au plus deux commutations localement (voir par exemple FIG. 3.7 page 37). Dans le cas elliptique, le nombre de commutations n'est pas borné a priori.

En utilisant [46], on montre qu'il n'y a pas de phénomène de FULLER (*i.e.* pas d'accumulation des points de commutations) et que les extrémales sont bang-bang.  $\square$

On peut aussi conclure sur l'existence d'une trajectoire temps-minimale joignant deux états  $(x_0, l_0)$  et  $(x_1, l_1)$  du domaine elliptique. En effet, d'après le résultat de contrôlabilité, il existe un contrôle constant par morceaux joignant ces deux états, en restant dans le domaine. Cette trajectoire évite la collision : il existe  $r_0 > 0$  tel que  $\|q\| \geq r_0$  et on peut appliquer le *théorème d'existence* de FILIPOV en imposant la contrainte  $\|q\| \geq r_0$  sur les trajectoires pour obtenir que les trajectoires sont uniformément bornées.

On a donc un algorithme simple pour calculer des extrémales pour le problème du temps minimal lorsque le contrôle est uniquement orienté le long de  $F_t$ .

<sup>1</sup>La classification des extrémales régulières se fait selon l'ordre de contact avec la surface de commutation.



### 3.2.3 Quelques résultats numériques

Avant de passer à la présentation de la technique de moyennation, nous présentons quelques premiers résultats numériques obtenus pour le problème du temps minimal à l'aide de la méthode de tir. Les extrémales sont calculées pour le problème à masse variable ainsi que pour le problème à masse constante.

#### 3.2.3.1 Conditions de simulation

Comme cela a été brièvement évoqué auparavant, nous réalisons une continuation sur la poussée maximale  $F_{\max}$  en prenant comme point de départ une poussée dite forte (60 Newtons). En cela nous reprenons la méthodologie utilisée dans [26, 30] et en particulier le résultat suivant (tiré de [30]) :

**Proposition 3.4.** *Sous l'hypothèse que les trajectoires restent dans un compact fixe, le temps minimum  $T$  est une fonction continue à droite de la borne de la poussée  $F_{\max}$ .*

Afin d'accélérer la continuation et de diminuer le nombre d'étapes, on peut tirer partie de l'heuristique  $T \cdot F_{\max} \simeq \text{cste}$  [26, 30] dont on constate qu'elle reste vraie en mono-entrée (voir FIG. 3.4 page 35).

La valeur physique de la constante de gravitation terrestre est  $\mu = 5165,8620912 \text{ Mm}^3 \cdot \text{h}^{-2}$ , le coefficient d'éjection des gaz est  $\beta = 0,0142 \text{ Mm}^{-1} \cdot \text{h}$  pour le problème à masse variable. Les conditions extrémales sont données dans la table 3.1.

Conditions initiales			Conditions finales		
$P(0)$	11,625	Mm	$P(T)$	42,165	Mm
$e_x(0)$	0,75		$e_x(T)$	0,00	
$e_y(0)$	0,00		$e_y(T)$	0,00	
$h_x(0)$	0,0612	rad	$h_x(T)$	0,00	rad
$h_y(0)$	0,00	rad	$h_y(T)$	0,00	rad
$l(0)$	$\pi$	rad	$l(T)$		
$m(0)$	1500	kg	$m(T)$		

TAB. 3.1 – Conditions initiales et finales

Les valeurs de  $l(T)$  et  $m(T)$  sont usuellement laissées libres, sauf mention explicite du contraire.

#### 3.2.3.2 Résultats

On donne les résultats obtenus dans les tables 3.2(a)-(b). Les simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel COTCOT [21] issu de TfMin [29] sur un ordinateur de bureau avec un processeur cadencé à 2,8 GHz. L'intégrateur utilisé dans

COTCOT pour intégrer le système Hamiltonien (et donc évaluer la fonction de tir) est l'intégrateur RKF45 [62] (modification de FEHLBERG [35] d'ordre 5 de la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4), le second membre du système étant calculé par différentiation automatique avec AdiFOR [9]. Le solveur d'équations non linéaires utilisé pour résoudre l'équation de tir est le solveur HYBRD (modification hybride de POWELL [57] de la méthode de NEWTON).

Dans les tables 3.2(a)-(b),  $T$  est le temps de transfert obtenu et  $\|S(T, p(0))\|$  est la norme de la fonction de tir<sup>2</sup>. Une valeur de la colonne  $t_{\text{exec}}$  est la somme (si des étapes intermédiaires sont nécessaires) des temps d'exécution à partir de la solution de l'équation de tir de la poussée précédente.

Ainsi par exemple, dans le modèle à masse constante, en utilisant la valeur de  $(T, p(0))$  solution de la fonction de tir pour  $F_{\text{max}} = 30$  Newtons, il a fallu 2,41 secondes pour converger vers le résultat pour  $F_{\text{max}} = 24$  Newtons.

$F_{\text{max}}$	$T$ (h)	$\ S(T, p_0)\ $	$t_{\text{exec}}$	$F_{\text{max}}$	$T$ (h)	$\ S(T, p_0)\ $	$t_{\text{exec}}$
60,0 N	18,75	5,30E-09	0,09 s	60,0 N	16,74	3,38E-08	0,09 s
30,0 N	34,51	9,50E-09	2,30 s	30,0 N	32,31	6,80E-08	2,18 s
24,0 N	44,82	3,49E-08	2,41 s	24,0 N	40,76	3,20E-08	1,06 s
12,0 N	92,70	5,96E-08	5,12 s	12,0 N	85,44	3,68E-08	4,61 s
10,0 N	110,40	2,93E-07	2,62 s	10,0 N	101,02	7,76E-08	6,81 s
9,0 N	119,07	1,16E-07	15,81 s	9,0 N	109,67	7,86E-08	3,15 s
7,5 N	141,65	3,63E-08	2,38 s	7,5 N	131,67	2,78E-07	8,41 s
6,0 N	176,14	8,45E-08	5,63 s	6,0 N	165,32	5,59E-08	10,08 s
5,0 N	211,49	1,11E-07	5,63 s	5,0 N	198,98	5,24E-07	12,10 s
4,5 N	235,34	5,77E-08	3,62 s	4,5 N	220,81	7,42E-08	4,29 s
4,0 N	264,92	1,16E-07	13,42 s	4,0 N	248,15	3,91E-08	7,98 s
3,5 N	302,87	1,35E-07	22,47 s	3,5 N	286,43	7,56E-06	12,40 s
3,0 N	354,07	9,02E-07	27,23 s	3,0 N	331,93	1,56E-08	6,56 s
2,5 N	424,38	2,05E-07	29,53 s	2,5 N	400,47	6,26E-07	23,05 s
2,0 N	531,04	1,15E-07	21,39 s	2,0 N	500,07	1,32E-07	16,46 s
1,5 N	713,71	3,93E-07	55,00 s	1,5 N	663,96	5,92E-07	66,95 s
1,0 N	1065,65	4,44E-06	46,56 s	1,0 N	997,09	2,41E-07	178,51 s

(a) Masse constante

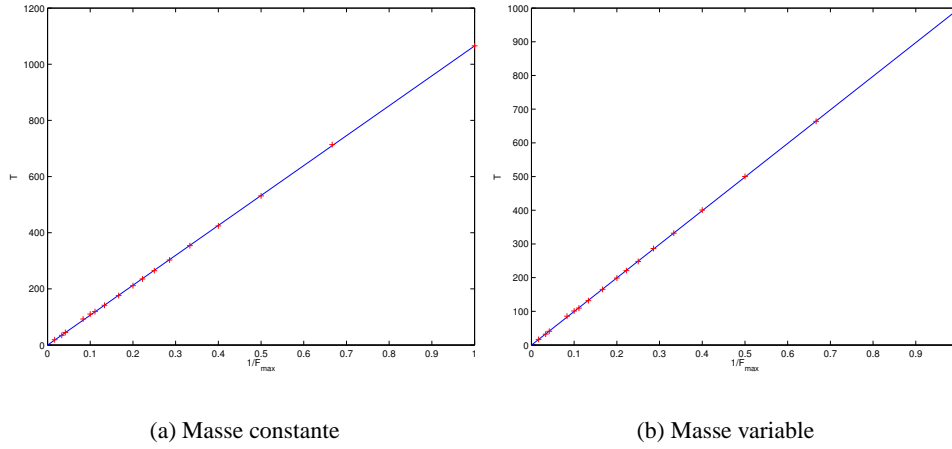
(b) Masse variable

TAB. 3.2 – Extrémales pour le temps minimum

L'approximation du modèle à masse variable par le modèle à masse constante introduit une diminution du temps total de calcul (4 min 20 s pour le modèle à masse constante contre 6 min 05 s pour le modèle à masse variable) pour une augmentation du temps de transfert  $T$  raisonnable (entre 6% et 9% en moyenne).

La figure 3.4 présente l'évolution du temps minimum  $T$  en fonction de  $1/F_{\text{max}}$  afin de vérifier *a posteriori* l'heuristique.

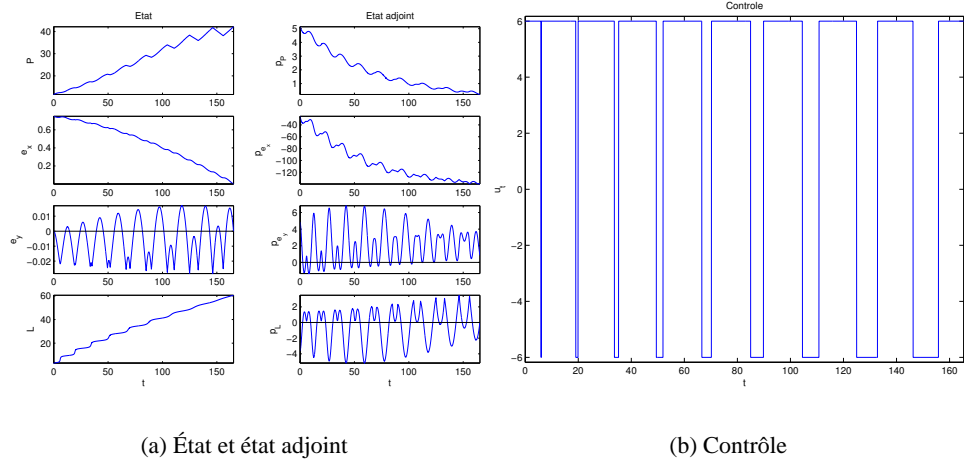
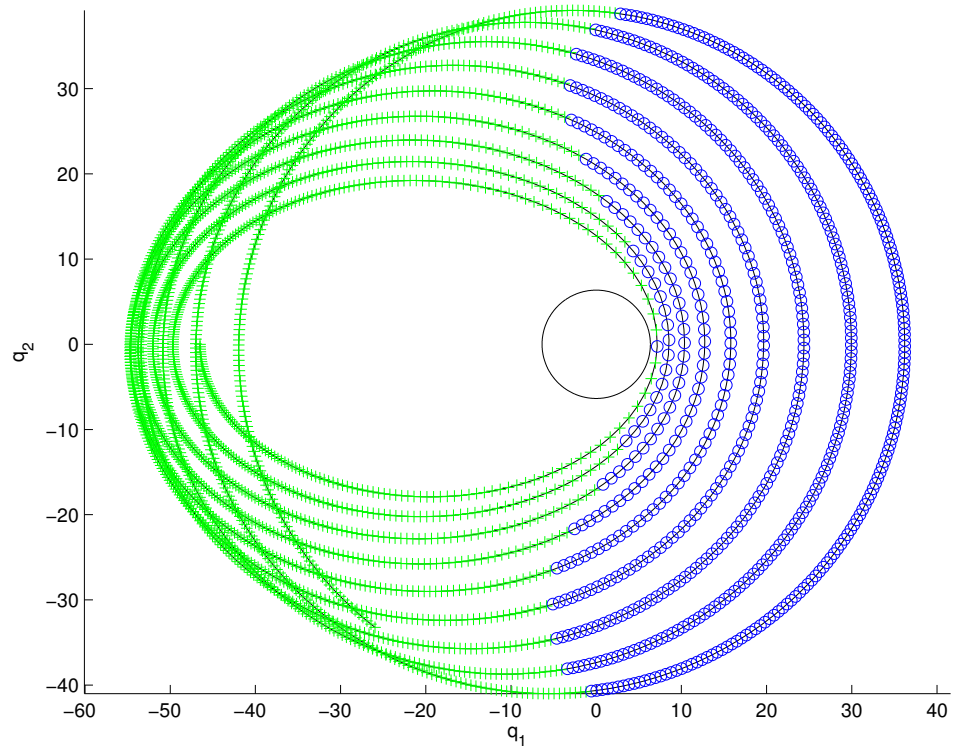
<sup>2</sup>Le temps final  $T$  étant libre dans le cas du problème du temps minimum, il devient une inconnue supplémentaire dans la formulation de l'équation de tir : l'équation supplémentaire associée vient des conditions de transversalité et porte sur la valeur de l'Hamiltonien.

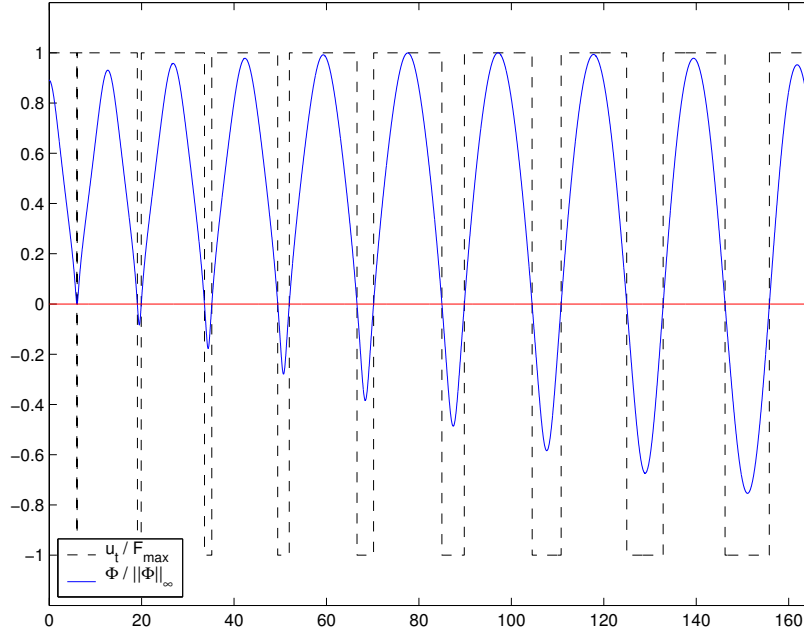
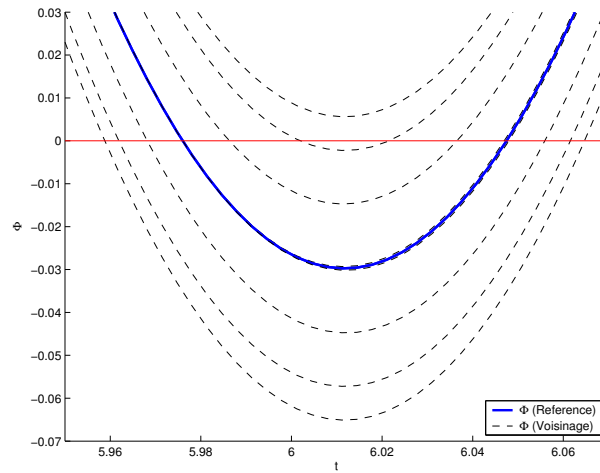
FIG. 3.4 – Évolution du temps minimum  $T$  en fonction de  $1/F_{\max}$ 

### 3.2.3.3 Analyse des extrémales

**Localisation des plages de commande** Nous présentons dans les figures 3.5(a)-(b) et 3.6 l'extrémale obtenue pour  $F_{\max} = 6$  Newtons. La nature bang-bang du contrôle est clairement visible. Tout en constatant que les plages de décélération ( $u_t = -F_{\max}$ ) sont de plus en plus larges, on observe également une forte régularité dans les commutations.

Cette régularité peut s'expliquer en observant plus en détail la figure 3.6 : on peut constater que la poussée produit une accélération (plages de poussées indiquées par des croix) autour de l'*apogée*. L'apocentre est le point le plus éloigné de la Terre et est donc le point où l'effet de la gravitation y est le plus faible, c'est-à-dire là où l'accélération produite sera la plus efficace. De la même façon, la poussée produit une décélération (plages de poussées indiquées par des ronds) autour du *périgée*, point le plus proche de la Terre, là où la gravitation est la plus forte et donc là où la décélération produite sera la plus efficace.

FIG. 3.5 – Extrémale pour  $F_{\max} = 6$  NewtonsFIG. 3.6 – Trajectoire pour  $F_{\max} = 6$  Newtons. Les croix correspondent à des accélérations ( $u_t = +F_{\max}$ ) et les ronds à des décélérations ( $u_t = -F_{\max}$ ).

(a) Fonction de commutation  $\Phi = \langle p, F_t \rangle$  et contrôle (en pointillés)

(b) Extrémales voisines autour de la première commutation

FIG. 3.7 – Commutations pour  $F_{\max} = 6$  Newtons. L'extrémale présentée ici est régulière en vertu des résultats précédents et tous les contacts avec la surface de commutation sont d'ordre un. En considérant les extrémales régulières voisines (en pointillés dans la deuxième figure), on peut observer que le point de commutation est au voisinage d'un point de contact d'ordre deux de type parabolique.



## **Deuxième partie**

# **Moyennation**





## Chapitre 4

# Le problème de minimisation de l'énergie et la moyennation en transfert orbital

### 4.1 Le cadre sous-Riemannien

On considère sur une variété  $X$  le problème optimal suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i F_i(x(t)) \quad , \quad \text{Min}_{u(\cdot)} \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i(t)^2} dt$$

où les  $F_i$  sont  $m$  champs lisses indépendants. Le coût est la longueur de la courbe  $t \mapsto x(t)$  tangente à la distribution  $D = \{F_1, \dots, F_m\}$  et, par construction, les champs  $F_1, \dots, F_m$  sont orthonormés pour la métrique. Ce type de problème généralise le cas où  $m = n = \dim X$ , qui est le cadre Riemannien. Pour ce type de problème, on a des propriétés intéressantes, en supposant que la dimension de l'algèbre de LIE engendrée par les champs est  $n$  en tout point, voir [12].

En supposant  $X$  connexe, on définit une *distance* sur  $X$ , dont la topologie coïncide avec la topologie initiale en définissant  $d(x_0, x_1)$  comme la plus petite longueur parmi les courbes  $x(\cdot)$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  et tangentes à  $D$ .

Par ailleurs, *localement le théorème d'existence* est valide et chaque couple de points  $(x_0, x_1)$  assez voisins peut être joint par une solution minimisante, qui vérifie la condition d'extrémalité du principe du maximum.

On peut montrer que le problème de minimisation de la longueur équivaut au problème de minimisation de l'énergie  $\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt$  où  $T$  est fixé, de même que minimiser le temps de transfert sous la contrainte supplémentaire  $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq 1$ . Donc, dans le **cadre sous-Riemannien, les trois problèmes associés au transfert orbital : minimisation  $L^1$ , minimisation  $L^2$  ou temps minimal sont équivalents.**

En utilisant l'énergie, le pseudo-Hamiltonien est :

$$H(x, p, u) = \sum_{i=1}^m u_i P_i + p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2 \quad (4.1)$$

avec  $P_i = \langle p, F_i(x) \rangle$ . Dans le *cas normal*,  $p^0$  est normalisé à  $-1/2$  et  $p^0 = 0$  est le *cas anormal*.

En résolvant  $\partial H / \partial u = 0$  dans le cas normal, on obtient  $u_i = P_i$  et le vrai Hamiltonien est  $\hat{H}(x, p) = (1/2) \sum_{i=1}^m P_i^2$  et les trajectoires paramétrées par la longueur sont sur le niveau  $\hat{H} = 1/2$ . On désigne par  $\exp_{x_0}$  l'application exponentielle dans le cas normal. On note  $\mathbf{S}(x_0, r)$  la sphère de centre  $x_0$  formée des points à distance  $r$  de  $x_0$ . Dans le cas normal, un instant  $t_c$  est dit *conjugué* si  $\exp_{x_0}(\cdot, t_c)$  n'est pas une immersion. Le point conjugué est alors la valeur critique correspondante. Le *lieu conjugué*  $C(x_0)$  est l'ensemble des premiers points conjugués en considérant toutes les extrémals issues de  $x_0$ . Le premier point où une extrémale cesse d'être minimisante s'appelle le *point de coupure*<sup>1</sup>, et l'ensemble des points forment le *lieu de coupure*<sup>2</sup>.

Dans le cas Riemannien, contrairement au cas sous-Riemannien, il n'y a que des extrémals normales. De plus, localement l'application exponentielle est une bijection, la sphère de petit rayon étant lisse et construite comme image de l'application exponentielle pour des temps assez petits. Dans le cas sous-Riemannien, la sphère de petit rayon n'est pas lisse et les points conjugués s'accumulent en  $x_0$ . Ces propriétés sont cruciales dans notre étude du transfert orbital moyenné.

## 4.2 La technique de moyennation dans le problème de minimisation de l'énergie

On considère un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^m u_i F_i(x, l) \\ \dot{l} &= g_0(x, l) \quad , \quad (x, l) \in X \times \mathbf{S}^1 \end{aligned}$$

où les  $F_i$  et  $g_0$  sont lisses,  $g_0 > 0$  et le problème est de minimiser l'énergie  $\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt$ , le contrôle vérifiant la contrainte  $\|u\| \leq \varepsilon$ .

En introduisant la variable coût, on adjoint l'équation  $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt$ . En

---

<sup>1</sup>cut point

<sup>2</sup>cut locus

remplaçant  $u$  par  $\varepsilon u$  on obtient un système étendu avec  $c = \varepsilon x^0$  de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dl} &= \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^m u_i F_i(x, l)}{g_0(x, l)} \\ \frac{dx^0}{dl} &= \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2}{g_0(x, l)} \quad \text{où } \|u\| \leq 1.\end{aligned}$$

Après relaxation de la contrainte sur le contrôle, le pseudo-Hamiltonien associé est :

$$H(x, p, l) = \frac{\varepsilon}{g_0(x, l)} \left( p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2 + u_i P_i \right)$$

où  $P_i = \langle p, F_i(x, l) \rangle$ . La variable  $p^0$  est la variable duale de  $x^0$ . Si la longitude est libre, on est dans le cas normal. On peut donc poser  $p^0 = -1/2$  et les trajectoires extrémales sont les solutions du vrai Hamiltonien :

$$\hat{H}(x, p, l) = \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^m P_i^2(x, p, l)}{2g_0(x, l)}.$$

Le Hamiltonien ainsi défini est périodique en la variable angulaire  $l$  et on pose :

**Définition 4.1 (Hamiltonien moyenné).** On appelle Hamiltonien moyenné le *Hamiltonien*

$$\bar{H}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{H}(x, p, l) dl.$$

Il s'agit de moyennation par rapport à une *seule variable angulaire* des champs de vecteurs Hamiltoniens. Les trajectoires respectives sont reliées par les théorèmes issus de [6]. Notons  $z = (x, p)$  la trajectoire de  $H$  issue de  $z(0)$  et  $x^0$  le coût (renormalisé) associé et  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{p})$  la trajectoire de  $\bar{H}$  issue du même point  $z(0)$  et  $\bar{x}^0$  la moyenne de  $x^0$ , nous avons alors :

**Proposition 4.2.** On a  $\|z - \bar{z}\| \leq \varepsilon$  et  $|x^0 - \bar{x}^0| \leq \varepsilon$  uniformément pour une longueur de l'ordre  $O(1/\varepsilon)$ .

Donc  $\bar{H}$  est une bonne approximation de  $\hat{H}$  pour la topologie de la convergence uniforme et  $\bar{x}^0$  une bonne approximation du coût, ce qui justifie le remplacement de  $\hat{H}$  par  $\bar{H}$ , en particulier dans les méthodes de tir. Le contrôle extrémal  $u(x, p, l)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique en  $l$  pouvant être modifié en pratique en remplaçant  $(x, p)$  par  $(\bar{x}, \bar{p})$ . L'effet de la moyennation est d'éliminer la variable angulaire et son évolution : d'où l'intérêt d'introduire un problème de contrôle optimal inverse comme on va le voir dans la suite.

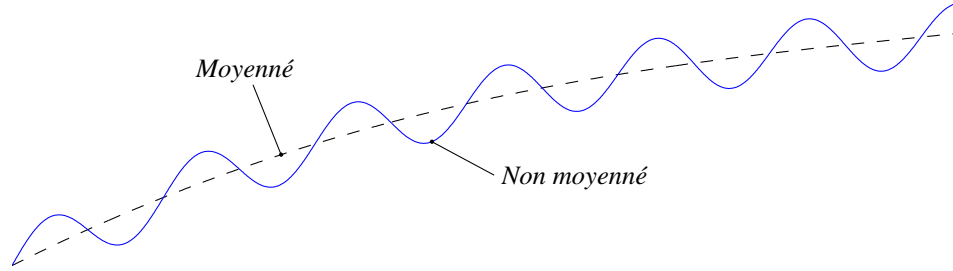


FIG. 4.1 – Moyennation

### 4.3 Problème sous-Riemannien associé au moyenné

Par construction  $\hat{H}$  est une forme quadratique positive en  $p$  et de rang constant  $m$ . On dit que le moyenné  $\bar{H}$  est régulier si son rang en  $p$  est constant et égal à  $k$  ( $k \geq m$  nécessairement, cf. [13]). En utilisant le théorème de GAUSS, on peut alors écrire  $\bar{H} = (1/2) \sum_{i=1}^k P_i^2$  avec  $P_i = \langle p, \bar{F}_i \rangle$  (cette dernière égalité définissant de nouveaux champs de vecteurs  $\bar{F}_i$  de la seule variable  $x$ ) et  $\bar{H}$  est le Hamiltonien associé au problème sous-Riemannien :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^k u_i \bar{F}_i(x) \quad , \quad \text{Min} \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2 dt.$$

En particulier si  $k = n = \dim X$ ,  $\bar{H}$  est le Hamiltonien d'un problème Riemannien. Les contrôles  $u_i$  ne sont pas reliés ici aux contrôles initiaux, mais le problème sous-Riemannien est lui une bonne approximation du problème initial.

## 4.4 Calcul du moyenné associé au transfert orbital et analyse du problème optimal associé

### 4.4.1 Calculs

Donnons le détail des calculs dans le cas mono-entrée, c'est-à-dire lorsque la poussée est orientée dans la direction tangentielle. On écrit  $\hat{H} = (1/2)'pA(v, x)p$  où  $v = l - \omega$  est la longitude vraie et  $A$  est la matrice symétrique dont les coefficients

sont [19] :

$$\begin{aligned}
 A_{nn} &= 9n^{1/3}(1-e^2)^{1/2} \frac{1+2e\cos v+e^2}{(1+e\cos v)^2}, \\
 A_{ee} &= \frac{4(1-e^2)^{5/2}}{n^{5/3}} \frac{1}{1+2e\cos v+e^2} \left( \frac{e+\cos v}{1+e\cos v} \right)^2, \\
 A_{\omega\omega} &= \frac{4(1-e^2)^{5/2}}{n^{5/3}e^2} \frac{1}{1+2e\cos v+e^2} \left( \frac{\sin v}{1+e\cos v} \right)^2, \\
 A_{ne} &= -\frac{6(1-e^2)^{3/2}}{n^{2/3}} \frac{e+\cos v}{(1+e\cos v)^2}, \\
 A_{n\omega} &= -\frac{6(1-e^2)^{3/2}}{n^{2/3}e} \frac{\sin v}{(1+e\cos v)^2}, \\
 A_{e\omega} &= \frac{4(1-e^2)^{5/2}}{n^{5/3}e} \frac{1}{1+2e\cos v+e^2} \frac{(e+\cos v)\sin v}{(1+e\cos v)^2}.
 \end{aligned}$$

Alors  $\bar{H} = (1/2)^t p \bar{A}(x) p$  où l'on obtient  $\bar{A}$  en moyennant les six coefficients de  $A$ .

Le calcul, bien que long, est beaucoup simplifié en remplaçant la moyennation relativement à  $l$  par la moyennation par rapport à  $v$ . Les intégrandes sont de la forme  $Q(\cos v, \sin v)$  où  $Q$  est une fraction rationnelle : ils sont alors évalués à partir des résidus de fractions rationnelles en les pôles associés aux dénominateurs  $1+e\cos v$  et  $1+2e\cos v+e^2$ , c'est-à-dire  $z = (-1+\sqrt{1-e^2})/e$  et  $z = -e$  respectivement.

Le choix des coordonnées  $(n, e, \omega)$  est remarquable car, comme dans le cas bi-entrées [13], il conduit à une matrice  $\bar{A}$  diagonale dont les coefficients sont :

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{nn} &= 9n^{1/3}, \\
 \bar{A}_{ee} &= \frac{1}{n^{5/3}} \frac{4(1-e^2)^{3/2}}{1+\sqrt{1-e^2}}, \\
 \bar{A}_{\omega\omega} &= \frac{1}{n^{5/3}} \frac{4(1-e^2)}{e^2(1+\sqrt{1-e^2})}.
 \end{aligned}$$

Le Hamiltonien moyenné est donc :

$$\bar{H} = \frac{1}{2n^{5/3}} \left[ 9n^2 p_n^2 + \frac{4(1-e^2)^{3/2}}{1+\sqrt{1-e^2}} p_e^2 + \frac{4(1-e^2)}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{p_\omega^2}{e^2} \right] \quad (4.2)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle p, \bar{F}_i(x) \rangle^2$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \frac{3n}{n^{5/6}} \frac{\partial}{\partial n}, \\ \bar{F}_2 &= \frac{2}{n^{5/6}} \frac{(1-e^2)^{3/4}}{(1+\sqrt{1-e^2})^{1/2}} \frac{\partial}{\partial e}, \\ \bar{F}_3 &= \frac{2}{n^{5/6}} \frac{(1-e^2)^{3/4}}{e(1+\sqrt{1-e^2})^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \omega}.\end{aligned}$$

On en déduit :

**Proposition 4.3.** *Le Hamiltonien moyenné  $\bar{H}$  est associé à la métrique :*

$$\bar{g} = \frac{dn^2}{9n^{1/3}} + \frac{n^{5/3}}{4} \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^{3/2}} de^2 + \frac{n^{5/3}}{4} \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} e^2 d\omega^2$$

pour laquelle les coordonnées  $(n, e, \omega)$  sont orthogonales.

**Cas du transfert coplanaire** Comparons ce résultat avec la moyennation associée au transfert coplanaire, *i.e.* avec un contrôle bi-entrées. La métrique associée est dans ce cas [14] :

$$\bar{g} = \frac{dn^2}{9n^{1/3}} + 2 \frac{n^{5/3}}{5-5e^2} de^2 + 2 \frac{n^{5/3}}{5-4e^2} e^2 d\omega^2.$$

Dans ce calcul, il faut tenir compte du contrôle agissant dans la direction tangentielle  $F_t$  mais également du contrôle agissant dans la direction normale  $F_n$  et le calcul est plus complexe.

Malgré l'analogie entre les deux métriques [15], les propriétés initiales du système sont très différentes. En effet, dans le cas coplanaire bi-entrées, les crochets de LIE de longueur un sont suffisants pour générer l'algèbre de LIE, alors que les crochets de longueur deux sont nécessaires dans le cas mono-entrée. Donc malgré l'analogie structurelle [15] des deux métriques, une différence est notable pour l'analyse du moyenné (*cf.* [14] pour le cas bi-entrées coplanaire et [19] pour le cas mono-entrée).

Pour terminer, analysons les extrémales anormales.

**Lemme 4.4.** *Il n'existe pas d'extrémale anormale pour le problème de minimisation de l'énergie à longitude finale fixée et temps final libre.*

*Démonstration.* Considérons le problème de minimisation de l'énergie lorsque la variable duale du coût est nulle. L'Hamiltonien s'écrit :  $H = p^0 u_t^2 + \langle p, F_0 \rangle + u_t \langle p, F_t \rangle$  avec  $p^0 = 0$ . La condition de maximisation donne  $\langle p, F_t \rangle = 0$ .

Dans le problème de transfert orbital, la condition de transversalité donne à l'instant final  $H = 0$  quand le temps final est libre. En dérivant la condition de maximisation, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}\langle p, F_t \rangle &= 0 \\ \langle p, [F_0, F_t] \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Dans le cas mono-entrée, c'est-à-dire lorsque la poussée est uniquement orientée selon  $F_t$ , on obtient en dérivant une nouvelle fois la condition de maximisation les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\langle p, F_t \rangle &= 0 \\ \langle p, [F_t, F_0] \rangle &= 0 \\ \langle p, [[F_t, F_0], F_0] \rangle + u_t \langle p, [[F_t, F_0], F_t] \rangle &= 0 \\ \langle p, F_0 \rangle &= 0 \text{ à l'instant final.}\end{aligned}$$

A l'instant final, avec la structure de l'algèbre de LIE, il vient que le coefficient de  $u_t$  est nul car  $[[F_t, F_0], F_t]$  est colinéaire à  $F_0$  : donc  $\langle p, [[F_t, F_0], F_0] \rangle = 0$ . Comme  $F_0, F_t, [F_t, F_0]$  et  $[[F_t, F_0], F_0]$  forment une base, on a nécessairement  $p = 0$  à l'instant final : l'existence d'extrémales anormales est exclue.  $\square$

#### 4.4.2 Mise sous forme normale

On observe que la métrique fait apparaître deux métriques en dimension deux :

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{dn^2}{9n^{1/3}} + n^{5/3} G_1(e) de^2 \\ g_2 &= n^{5/3} [G_1(e) de^2 + G_2(e) d\omega^2].\end{aligned}$$

La mise sous forme normale est essentiellement le calcul de coordonnées plates pour la première métrique (*i.e.* dont la courbure de GAUSS est nulle). On procède comme suit.

On pose  $\rho = (2/5)n^{5/6}$  et  $g_1 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$  où  $\theta$  est défini par :

$$d\theta^2 = \left[ \frac{5}{4} \frac{(1 + \sqrt{1 - e^2})^{1/2}}{(1 - e^2)^{3/4}} de \right]^2.$$

On obtient par intégration :

$$\theta = (5/4) \arcsin(1 - 2\sqrt{1 - e^2}). \quad (4.3)$$

La métrique  $g_1 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$  est sous forme polaire ce qui permet d'aboutir à la métrique plate  $g_1 = dx^2 + dy^2$  en posant  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$ .

L'étude de la métrique  $g_2$  et sa mise sous forme de LIOUVILLE (voir [19] pour plus de détails) permet d'établir le théorème suivant :

**Théorème 4.5.** *Le flot extrémal défini par le Hamiltonien moyenné  $\bar{H}$  est complètement intégrable.*

#### 4.4.2.1 Étude de la restriction à $p_\omega \equiv 0$

Nous étudions ici plus en détail la métrique  $g_1$  et le domaine obtenu par le changement de variable  $(n, e) \mapsto (\rho, \theta)$ . Rappelons que le domaine initial est  $\Sigma_{e,0} = \{n > 0, e \in ]-1, 1[ \}$ .

Le changement de variable est bien défini pour  $e \in ]-1, 0[$  ou  $e \in ]0, 1[$  et dans chaque cas, le domaine obtenu est le même et vaut  $E = \{\rho > 0, \theta \in ]-\theta_c, \theta_c[ \}$  avec  $\theta_c = 5\pi/8$  — la réciproque de (4.3) est en effet multiforme —.

Donc  $\Sigma_{e,0}$  est composé de deux copies de  $E$  (une pour  $e < 0$  et une pour  $e > 0$ ) accolées selon  $e = 0$  (i.e.  $\theta = -\theta_c = -5\pi/8$ ). On note dans la suite  $\Sigma_{e,0}^- = \Sigma_{e,0} \cap \{e < 0\}$  et  $\Sigma_{e,0}^+ = \Sigma_{e,0} \cap \{e > 0\}$  chacune de ces copies. On peut alors préciser le comportement des extrémales au contact de  $e = 0$ .

**Proposition 4.6 (Contacts avec  $e = 0$ ).** *Les contacts avec  $e = 0$  sont soit des points stationnaires soit des réflexions dans les coordonnées plates (de  $\Sigma_{e,0}^-$  vers  $\Sigma_{e,0}^+$  ou réciproquement).*

*Démonstration.* Comme le Hamiltonien moyenné est une forme quadratique par rapport à l'état adjoint,  $e = \text{cste}$  et  $p_e = 0$  sont des points stationnaires du système. Écrivons les équations de  $e$  et  $p_e$  dérivées du Hamiltonien moyenné (4.2) page 45 :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \frac{4(1-e^2)^{3/2}}{1+\sqrt{1-e^2}} p_e \\ \dot{p}_e &= \frac{4e\sqrt{1-e^2}(3+2\sqrt{1-e^2})}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} p_e^2. \end{aligned}$$

On a donc  $\dot{e} \neq 0$  hors du domaine  $p_e = 0$  : soit le contact est un point stationnaire, soit le signe change d'une copie à l'autre. Dans ce cas, comme  $\theta = (5/4) \arcsin(1 - 2\sqrt{1-e^2})$ ,  $\dot{\theta}$  a des limites à gauche et à droite opposées au moment où  $e$  vaut 0. Plus précisément :

$$\dot{\theta}|_{e=0^+} = -\dot{\theta}|_{e=0^-} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \dot{e}|_{e=0} \neq 0.$$

En revenant dans les coordonnées plates, on peut écrire en complexes :

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy = \rho e^{i\theta} \\ \dot{\xi} &= \dot{x} + i\dot{y} = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\theta})e^{i\theta} \end{aligned}$$

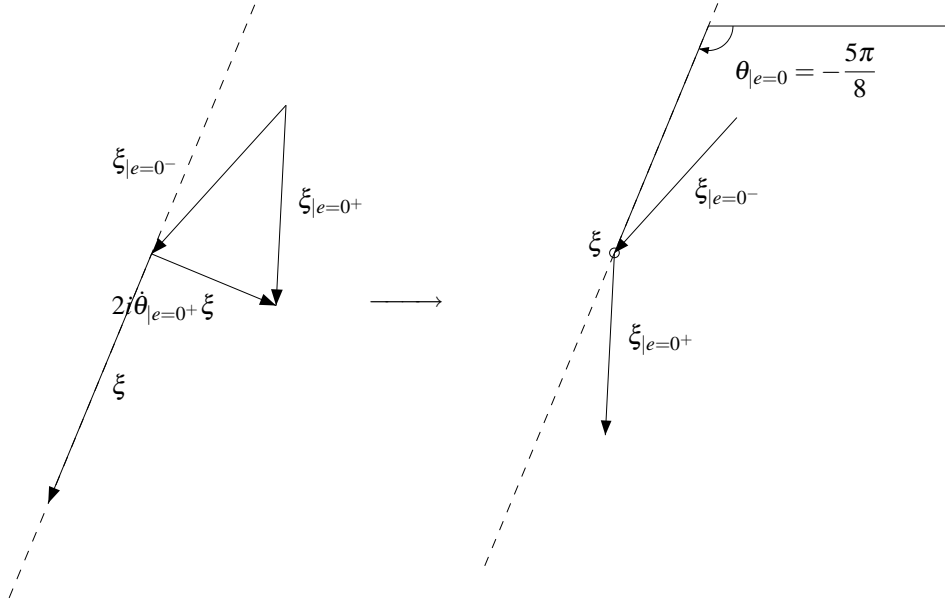
de sorte que l'on a  $|\dot{\xi}|_{e=0^+}| = |\dot{\xi}|_{e=0^-}|$  et :

$$\dot{\xi}|_{e=0^+} - \dot{\xi}|_{e=0^-} = 2i\dot{\theta}|_{e=0^+}\xi,$$

ce qui définit une réflexion au contact avec  $e = 0$  (voir FIG. 4.2).

□



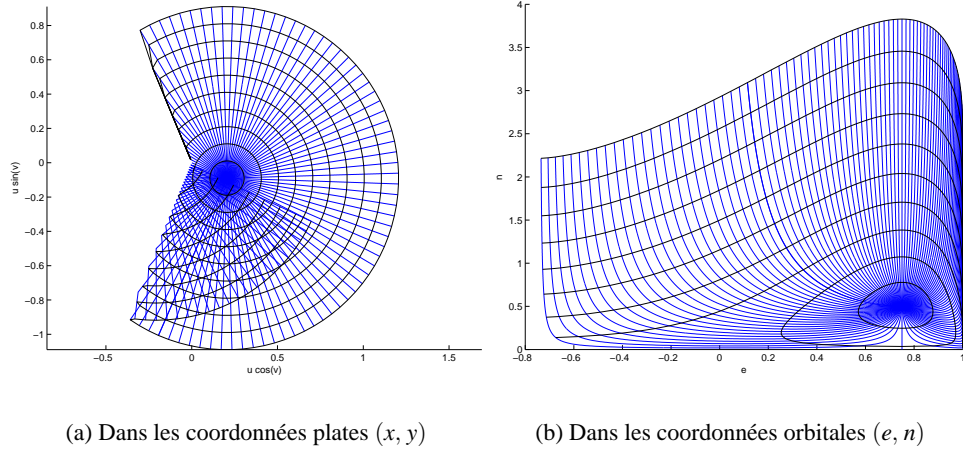
FIG. 4.2 – Contact avec  $e = 0$  (cas non-stationnaire)

*Remarque 4.1.* On a une singularité des extrémales dans les coordonnées plates  $(x, y)$  autour de  $e = 0$  car :

$$e = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{1 - \sin(4\theta/5)}{2} \right)^2}$$

mais dans les coordonnées  $(n, e)$  l'extrémale se prolonge de façon lisse en atteignant  $e = 0$  (voir FIG. 4.3), **le radical introduisant une complexité supplémentaire par rapport au cas bi-entrée.**

*Remarque 4.2.* Comme  $\theta_c > \pi/2$ ,  $E$  n'est pas convexe et **l'existence de solution optimale n'est donc pas assurée sur tout le domaine.**

FIG. 4.3 – Extrémales du problème moyenné avec  $(e(0), n(0)) = (0.75, 0.5)$ 

**Proposition 4.7.** Soit  $\xi_0 = (\rho_0, \theta_0) \in \Sigma_{e,0}^-$ .

- (i) Si  $\theta_0 \geq \theta'_c = \pi - \theta_c$ , il n'existe des extrémales que vers les points  $\xi = (\rho, \theta)$  de  $\Sigma_{e,0}^-$  tels que  $\theta > \theta_0 - \pi$ .
- (ii) Si  $|\theta_0| < \theta'_c$ , il existe des extrémales vers tout point de  $\Sigma_{e,0}^-$  mais il n'existe des extrémales que vers les points  $\xi = (\rho, \theta)$  de  $\Sigma_{e,0}^+$  tels que  $\theta < \pi - 2\theta_c - \theta_0$ .
- (iii) Si  $\theta_0 \leq -\theta'_c$ , il n'existe des extrémales que vers les points  $\xi = (\rho, \theta)$  de  $\Sigma_{e,0}^-$  tels que  $\theta < \pi + \theta_0$  et vers les points  $\xi = (\rho, \theta)$  de  $\Sigma_{e,0}^+$  tels que  $\theta < \pi - 2\theta_c - \theta_0$ .

Et symétriquement pour  $\xi \in \Sigma_{e,0}^+$ .

Les résultats sont résumés dans les figures 4.4(i)-(iii).

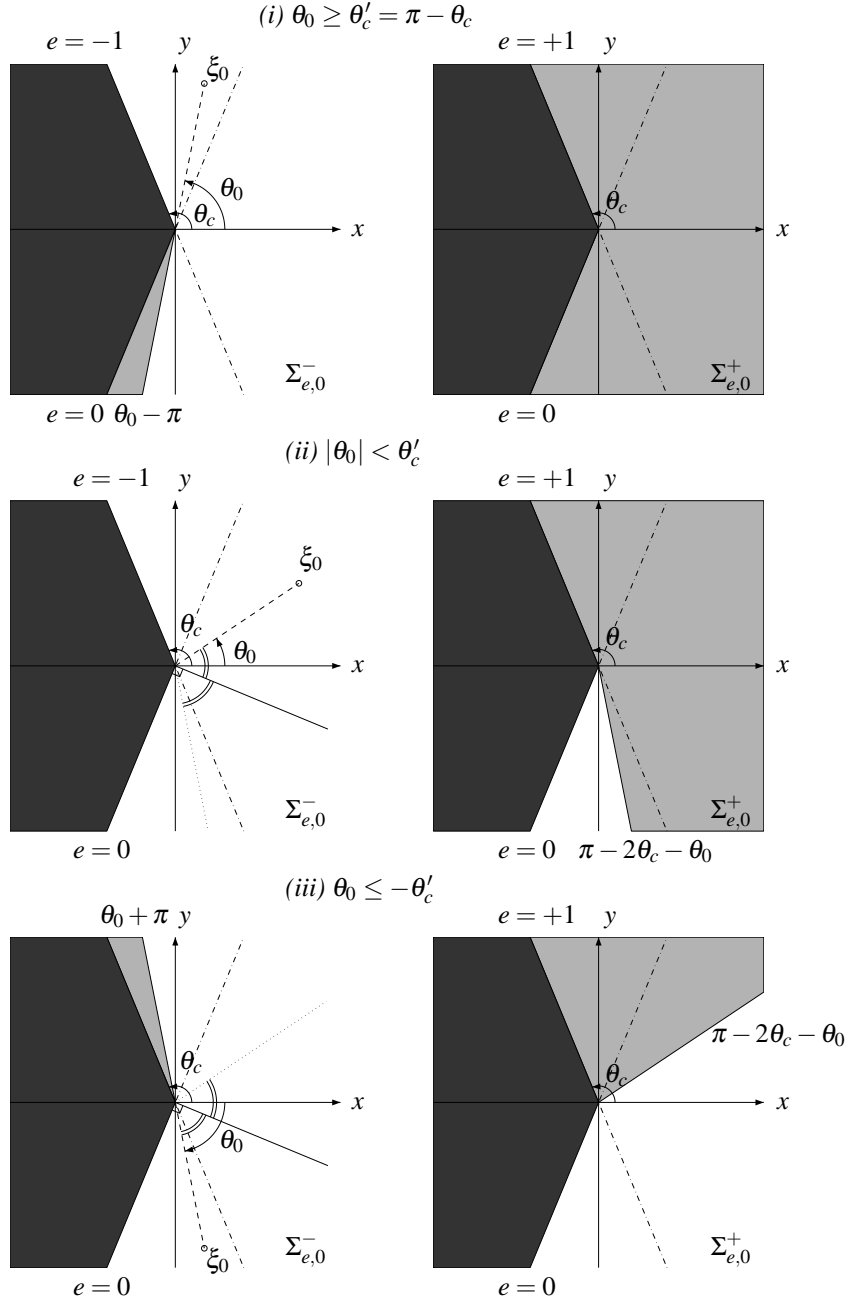


FIG. 4.4 – Domaines d'existence de solution optimale. En blanc, les points pouvant être atteints depuis  $\xi_0 \in \Sigma_{e,0}^-$  par une solution optimale ; en gris, les points du domaine elliptique ne le pouvant pas ; en noir, on est dehors du domaine elliptique.



## Chapitre 5

# Mise en œuvre pratique et simulation

### 5.1 Les restrictions

Pour l'utilisation pratique des résultats en transfert orbital, certains éléments sont à prendre en compte.

#### 5.1.1 La collision

Pratiquement, on doit imposer  $\|q\| \geq r_T$  où  $r_T$  est le rayon de la Terre. En considérant l'équation de KEPLER contrôlée  $\ddot{q} = -q/\|q\|^3 + \gamma$  avec  $\|q\| \geq r_1$ , on a donc la limitation de l'accélération  $\|\ddot{q}\| \leq 1/r_1^2 + \|\gamma\|$  et donc :

$$\|\dot{q} - \dot{q}(0)\| \leq \frac{T}{r_1^2} + \int_0^T \|\gamma(t)\| dt$$

ce qui assure une majoration de la norme  $L^\infty$  de  $(q, \dot{q})$  par une fonction de la norme  $L^1$  de  $\gamma$ . Ce type de majoration est nécessaire pour assurer les théorèmes d'existence avec des conditions de convexité sur la fonction coût.

#### 5.1.2 Le bord du domaine elliptique

A priori pour les théorèmes d'existence classiques, il n'est pas nécessaire de contraindre la trajectoire au domaine elliptique. Par contre pour avoir une bonne approximation par le moyenné, il faut éviter d'atteindre le bord du domaine parabolique : en effet sur ce bord, la vitesse angulaire  $g_0$  tend vers zéro.

Dans la pratique, cela revient à contraindre les trajectoires à un compact isolé du bord, ceci pour avoir une bonne correspondance entre les trajectoires moyennées et non moyennées.

## 5.2 La méthode de continuation

### 5.2.1 Présentation

On peut, avec les restrictions précédentes, bien implémenter numériquement la continuation entre le moyenné et le non-moyenné. Le point le plus intéressant de notre étude porte sur le transfert vers une orbite géostationnaire. On peut en effet, dans le cas où l'orbite finale est circulaire, réaliser le transfert en maintenant l'angle  $\omega$  du périégée fixe, ce qui correspond à  $p_\omega = 0$  et les trajectoires associées sont celles de la *métrique plate* dont les coordonnées linéarisantes sont explicites. Le vecteur adjoint (constant) représente alors *simplement la pente de la droite*. **Notre étude trivialise donc l'initialisation du vecteur adjoint pour la méthode de continuation pour un transfert vers une orbite géostationnaire.**

### 5.2.2 Réalisation

L'extrémale exprimée dans les coordonnées linéarisantes  $\xi = (x, y)$  vérifie que l'état adjoint  $p_\xi = (p_x, p_y)$  associé est constant et  $\xi(l) = \xi(0) + p_\xi l$ .

Ainsi la donnée de deux points extrémaux  $\xi(0)$  et  $\xi(L)$  et de la longitude finale  $L$  fournit immédiatement la valeur de  $p_\xi = (\xi(L) - \xi(0))/L$  et donc l'expression de  $\xi$  sur  $[0, L]$ . Rappelons que cette valeur de  $p_\xi$  est solution de l'équation de tir pour le problème moyenné et c'est cette valeur qui est utilisée pour l'initialisation de la méthode de tir dans le cas non-moyenné pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Dans la figure 5.1, on présente une extrémale moyennée partant de  $(n(0), e(0)) = (0.75, 0.5)$  ainsi que les extrémales non moyennées associées aux paramètres  $\varepsilon = 1e - 2$ ,  $5e - 2$  et  $1e - 3$ . Si on analyse les trajectoires obtenues dans les coor-

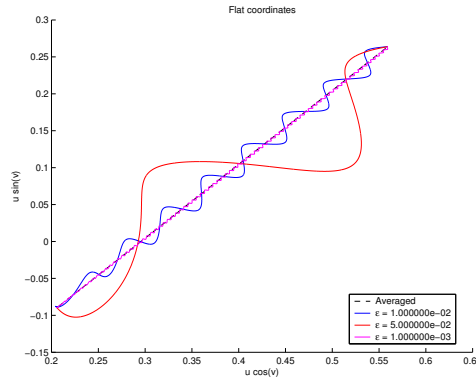


FIG. 5.1 – Extrémales moyennée et non moyennées

données cartésiennes géocentriques, on observe que l'extrémale moyennée est une suite d'ellipses osculatrices à la trajectoire non-moyennée (voir FIG. 5.2).

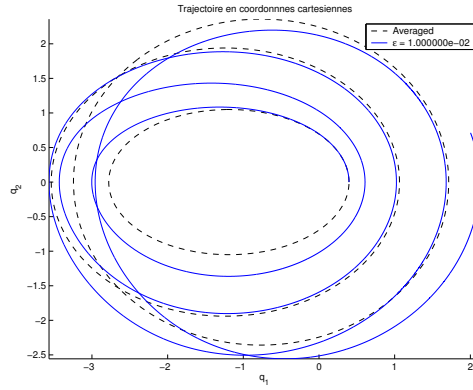


FIG. 5.2 – Trajectoires moyennée et non moyennée avec  $(e(0), n(0)) = (0.75, 0.5)$  et  $(e(L), n(L)) = (0.05, 0.3)$ . La trajectoire non-moyennée est associée au paramètre  $\varepsilon = 1e - 2$ .

### 5.2.3 Calcul des points conjugués

Les figures 5.3 et 5.4 présentent deux jeux d'extrémales avec les calculs de points conjugués associés. Chaque jeu comporte l'extrémale moyennée et trois extrémales non-moyennées pour  $\varepsilon = 5e - 2, 1e - 2, 5e - 3$ . Les points conjugués ont été recherchés jusqu'à huit fois le temps final.

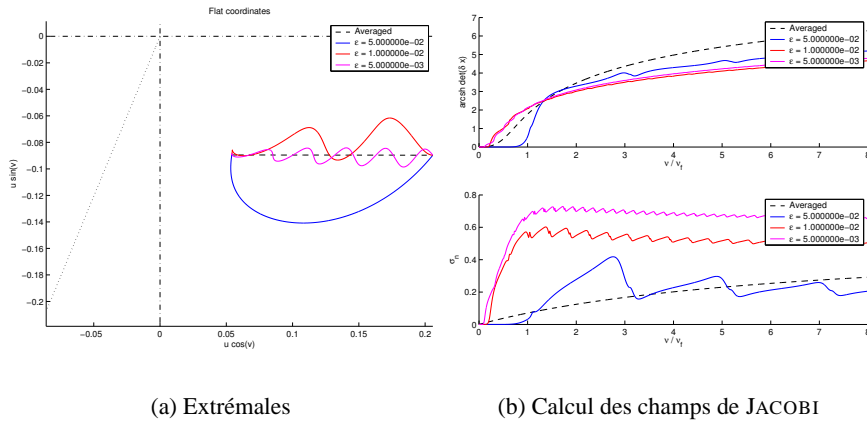
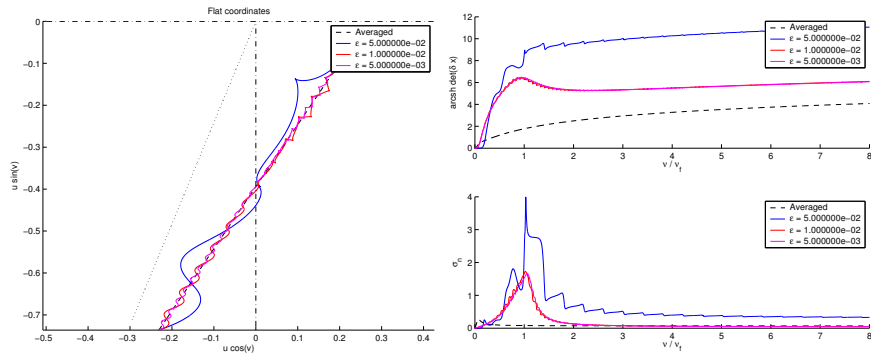


FIG. 5.3 –  $(e_0, n_0) = (0.5, 0.2)$ ,  $(e_f, n_f) = (0.75, 0.5)$

L'analyse des solutions du problème non-moyenné montre qu'il n'y a pas de point conjugué dans cet intervalle de recherche.



(a) Extrémales

(b) Calcul des champs de JACOBI

FIG. 5.4 –  $(e_0, n_0) = (0.5, 2.2)$ ,  $(e_f, n_f) = (0.75, 0.5)$



**Troisième partie**

**Homotopies lisses**



## Chapitre 6

# Les méthodes de continuation

*Remarque.* Dans toute la partie, on considère le problème de transfert orbital en temps minimum et on utilise le repère mobile **tangentiel-normal** (cf. section 3.2 page 29 et FIG. 3.2 page 29) pour représenter le contrôle.

### Motivation

D'après la **Propriété 3.3** page 32, la commande optimale pour le problème de temps minimum dans le cas mono-entrée est bang-bang, c'est-à-dire qu'elle est discontinue. Le vrai Hamiltonien  $\hat{H}(x, p) = H(x, p, \hat{u}(x, p))$  est donc **non-lisse**.

Les conditions suffisantes présentées au **Chapitre 2** requièrent que le Hamiltonien soit lisse et ne peuvent donc être utilisées directement ici. On propose donc une approche basée sur une régularisation lisse du problème. Il serait également possible de faire appel aux conditions du deuxième ordre dans le cas bang-bang [2] ainsi qu'aux méthodes numériques associées [51].

Il s'agit dans cette partie d'approcher le transfert mono-entrée par des transferts bi-entrées lisses, qu'ils soient coplanaires ou non. Ce choix est justifié par, d'une part, le fait que nous réalisons une connection à des résultats connus sur les transferts coplanaires [26, 47], d'autre part le fait que ces approximations lisses nous permettent d'utiliser le calcul de point conjugué disponible dans le cas lisse et implémentés dans COTCOT [21].

### 6.1 Principe

Plus précisément, considérons le problème en temps minimum avec extrémités fixes  $x_0$  et  $x_f$ . Un problème important pour assurer la convergence vers la solution de l'équation de tir  $S(T, p_0) = 0$  est d'avoir un bon point de départ initial pour  $p_0$  ; pour cela une méthode puissante est la méthode de continuation [5]. On plonge le problème de transfert mono-entrée noté  $(P_1)$  dans une famille à un paramètre  $(P_\lambda)$  de problèmes où  $\lambda$  parcourt  $[0, 1]$ . Ce principe a été exploité dans le cas du

problème du temps minimum avec la continuation sur la poussée maximale  $F_{\max}$  dans [26], mais également dans [41, 50].

Une propriété fondamentale pour de telles méthodes de continuation est la régularité du chemin homotopique.

## 6.2 Continuations utilisées

Dans les deux homotopies que nous allons présenter, il s'agit de lisser le problème en relaxant une des deux composantes du contrôle (normale  $u_n$  ou hors-plan  $u_c$ ) : les deux problèmes  $(P_0)$  seront ainsi des problèmes de transfert bi-entrées où seule une des trois composantes du contrôle sera nulle.

### 6.2.1 Continuation sur le domaine de contrôle

Soit  $(P_0)$  le problème de transfert coplanaire ( $u_c = 0$ ) avec  $u = u_t F_t + u_n F_n$ . On relie le transfert mono-entrée à un problème avec un contrôle bi-entrées.

L'homotopie entre  $(P_0)$  et  $(P_1)$  peut alors être définie comme suit. Le problème  $(P_\lambda)$  est un transfert orbital avec le domaine de contrôle  $U_\lambda$ , où  $U_\lambda$  est l'ellipse (voir FIG. 6.1) :

- de centre  $0_{\mathbf{R}^2}$  ;
- de demi-grand axe de longueur  $F_{\max}$  dirigé selon la direction tangentielle  $F_t$  ;
- de demi-petit axe de longueur  $(1 - \lambda)F_{\max}$  dirigé selon la direction normale  $F_n$ .

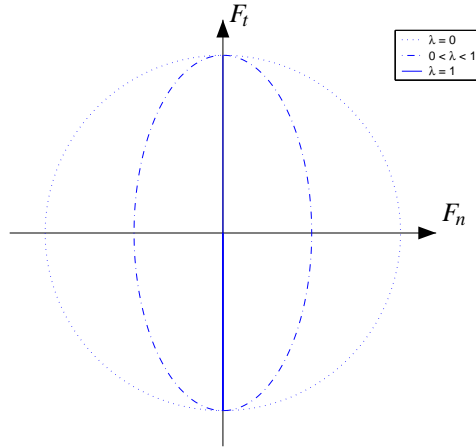


FIG. 6.1 – Continuation sur le domaine de contrôle.

La contrainte de norme de la poussée s'écrit alors :

$$\sqrt{u_t^2 + \left(\frac{u_n}{1 - \lambda}\right)^2} \leq F_{\max}$$

Sauf en des singularités isolées [26], le problème  $P_\lambda$  est lisse pour  $\lambda \in [0, 1[$  et il est associé avec le vrai Hamiltonien (lisse lui aussi) :

$$\hat{H}_\lambda = H_0 + \frac{F_{\max}}{m(t)} \sqrt{H_t^2 + (1 - \lambda)H_n^2}$$

où  $H_0 = \langle p, F_0 \rangle$ ,  $H_t = \langle p, F_t \rangle$  et  $H_n = \langle p, F_n \rangle$ .

Notons que lorsque  $\lambda$  tend vers 1,  $\hat{H}_\lambda$  converge vers  $H_0 + (F_{\max}/m)|H_t|$ , qui est le vrai Hamiltonien  $\hat{H}_1$  de  $(P_1)$ .

De plus, on a le résultat suivant [18] :

**Proposition 6.1 (Régularité de la fonction valeur).** *Si les trajectoires admissibles restent dans un compact fixe ne dépendant pas de  $\lambda$ , alors le temps minimum  $T : \lambda \rightarrow T(\lambda)$  est une fonction continue en  $\lambda = 1$ .*

*Démonstration.* Telle qu'elle est définie, la suite des domaines de contrôle  $(U_\lambda)_\lambda$  est décroissante au sens de l'inclusion. Soit  $(\lambda_k)_k$  une suite d'éléments de  $[0, 1]$  convergeant vers 1. L'hypothèse de compacité et la convexité de la dynamique assurent l'existence d'une solution  $(T_k, x_k, u_k)$  pour tout  $k$  et la suite  $(T_k)_k$  est majorée par la valeur  $T(1)$  du problème  $(P_1)$ . On peut donc trouver une sous-suite  $(T_k)_k$  (on reprend la même indexation pour la sous-suite) qui converge vers  $\tau \leq T(1)$ . On peut également supposer que la famille  $(x_k)_k$  bornée et équicontinue converge uniformément. Soit  $x$  cette limite.

On a  $\dot{x}_k \in f(t, x_k, U_{\lambda_k}) \subset f(t, x_k, U_0)$  presque partout par décroissance de la suite  $(U_\lambda)_\lambda$  avec  $f(t, x, u) = F_0(x) + u_t F_t(x) + u_n F_n(x)$ . Or  $f(t, x, U_0)$  est convexe donc  $\dot{x} \in f(t, x, U_0)$  (cf. [48], Chapitre 4, théorème 4). Comme  $U_0$  est compact, on peut choisir un contrôle  $u$  mesurable tel que  $\dot{x} = f(t, x, u)$  et la suite  $u_k$  converge pour la topologie duale faible de  $L^\infty$  et le principe de la borne uniforme donne  $\|u\|_\infty \leq \liminf_k \|u_k\|$ . En particulier, cette relation est valable pour chaque composante du contrôle et on obtient alors  $u_n = 0$  et  $\|u_t\|_\infty \leq F_{\max}$  à la limite. Donc  $(\tau, x, u)$  est admissible pour  $(P_1)$  et nécessairement optimal, puisque  $\tau \leq T(1)$ . Donc  $\tau = T(1)$ .  $\square$

## 6.2.2 Continuation sur l'inclinaison initiale

Contrairement à l'orbite finale qui se trouve dans le plan équatorial, on considère que l'orbite initiale n'est pas coplanaire à l'orbite finale et qu'elle n'est notamment pas dans le plan équatorial. On réalise alors une homotopie convexe sur l'inclinaison de l'orbite initiale (c'est-à-dire sur la condition initiale) définie par le vecteur  $h$  (cf. section 3.1 page 28). L'homotopie est définie comme suit (voir FIG. 6.2) :

$$h_{x,\lambda}(0) = (1 - \lambda)\eta$$

où  $\eta = h_{x,0}(0) \neq 0$  est l'inclinaison initiale du problème  $(P_0)$ .

En effet, le transfert mono-entrée est un transfert coplanaire et on utilise le résultat suivant [26].

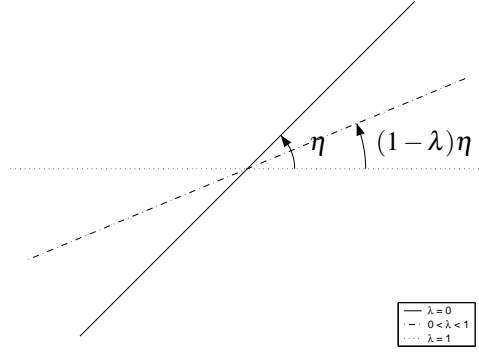


FIG. 6.2 – Continuation sur l'inclinaison.

**Lemme 6.2.** *Toute extrémale pour le transfert coplanaire est également une extrémale pour le transfert non-coplanaire, sous réserve que l'inclinaison initiale et l'inclinaison finale soient égales.*

On définit alors  $(P_0)$  en fixant  $u_n = 0$ , i.e.  $u = u_t F_t + u_c F_c$ ,  $\sqrt{u_t^2 + u_c^2} \leq F_{\max}$ . On relie le problème de transfert mono-entrée à un problème avec un contrôle bi-entrées, incluant une poussée non-coplanaire  $u_c$  dans ce cas.

### 6.3 Régularité du chemin de continuation

À partir des résultats obtenus dans le **Chapitre 2**, on a le résultat suivant :

**Proposition 6.3.** *S'il n'y a pas de point conjugué le long du chemin de continuation, l'application  $\lambda \mapsto (T(\lambda), p_0(\lambda))$  associée à n'importe laquelle des deux continuations présentées ci-avant est lisse pour  $0 \leq \lambda < 1$ .*

*Démonstration.* Considérons pour  $\lambda$  fixé l'équation de tir  $S_\lambda(T, p_0) = 0$ . S'il n'y a pas de point conjugué,  $S_\lambda$  est de rang maximum (voir **Définition 2.3** page 24).  $\lambda \mapsto S_\lambda(T, p_0)$  étant lisse par construction, l'équation peut être résolue de manière lisse en invoquant le théorème des fonctions implicites.  $\square$

## Chapitre 7

# Mise en œuvre pratique et simulations

### 7.1 Algorithme de continuation

Dans toute la suite, on considère le problème à masse **variable**.

Dans le cas du problème de maximisation de la masse, le problème a été traité avec des techniques de continuation incorporant une gestion automatique du paramètre homotopique : *homotopie différentielle* pour [41] et *homotopie simpliciale* pour [50]. Comme on va le voir, une continuation discrète faisant appel à une suite déterminée heuristiquement de paramètres homotopiques suffit ici à obtenir la convergence de chacune des deux homotopies (cf. également la table 7.1).

Les homotopies présentées dans le **Chapitre 6** relient deux types de transfert différents mais *pour la même valeur de la borne  $F_{max}$  de la poussée*. Pour chacune des deux continuations considérées, l'homotopie est paramétrée par  $\lambda$  parcourant le segment  $[0, 1]$ . La valeur  $\lambda = 0$  est alors associé à un des deux transferts bi-entrées présentés dans le chapitre précédent (c'est-à-dire coplanaire ou non-coplanaire selon le cas) et la valeur  $\lambda = 1$  est associé à notre problème cible, c'est-à-dire au transfert mono-entrée.

Dans la table 7.1 page suivante, nous présentons l'algorithme utilisé pour effectuer la continuation dans les deux cas.

### 7.2 Résultats

#### 7.2.1 Résolution des problèmes initiaux ( $P_0$ )

Avant de réaliser le suivi homotopique, nous devons tout d'abord résoudre l'équation de tir pour les deux problèmes ( $P_0$ ) qui constituent le point de départ (et le point de passage obligé) de chaque homotopie : transferts bi-entrées coplanaire et non-coplanaire. Afin d'avoir des éléments de comparaison par rapport à la

Soit une valeur de  $F_{\max}$  pour laquelle le problème  $(P_0)$  est résolu.

0. On se donne :
  - une *valeur cible*  $\lambda^* \in [0, 1]$  du paramètre homotopique ;
  - un *pas initial de progression*  $\lambda_{\text{step}}^0 \in ]0, 1]$  ;
  - un *coefficient d'adaptation de pas*  $\alpha \in ]0, 1[$  ;
  - et un *pas minimum de progression*  $\lambda_{\text{step}}^{\min} \in ]0, 1]$  au-delà duquel on arrête l'algorithme.
1.  $\lambda_1 \leftarrow 0$   
 $\lambda_{\text{step}} \leftarrow \lambda_{\text{step}}^0$ .
2. SI la méthode de tir converge pour le problème  $(P_{\lambda_n})$ , ALORS  
 $\lambda_{n+1} \leftarrow \lambda_n + \lambda_{\text{step}}$   
 On revient en 2 avec  $n + 1$  à la place de  $n$ .  
 SINON  
 $\lambda_n \leftarrow \lambda_{n-1} + \alpha \lambda_{\text{step}}$   
 $\lambda_{\text{step}} \leftarrow \alpha \lambda_{\text{step}}$   
 On revient en 2.
3. L'algorithme s'arrête :
  - si  $\lambda_n = \lambda^*$  : l'algorithme **réussit** ;
  - si  $\lambda_{\text{step}} < \lambda_{\text{step}}^{\min}$  : l'algorithme **échoue**.

TAB. 7.1 – Algorithme de continuation

résolution faite pour le transfert mono-entrée, on réalisera les simulations, c'est-à-dire aussi bien la résolution de l'équation de tir initiale que la continuation elle-même, pour les mêmes valeurs de la poussée maximale  $F_{\max}$  que celles qui ont été choisies pour le transfert mono-entrée (cf. table 3.2 page 34).

Les calculs sont réalisés dans les mêmes conditions que précédemment (ordinateur de bureau avec un processeur cadencé à 2.8 GHz). Les résultats sont donnés dans les tables 7.2(a)-(b) page 71. On observe sans surprise que la convergence et les temps d'exécution sont meilleurs que dans le cas mono-entrée, car ces problèmes bénéficient d'un Hamiltonien lisse (principalement parce que la commande est bi-entrées). Notons pour être plus précis que la convergence est meilleure en termes de norme de fonction de tir et de temps d'exécution dans le cas coplanaire que dans le cas non-coplanaire.

Remarquons par ailleurs que les temps de transfert obtenus pour le transfert mono-entrée (cf. 3.2 page 34) ne sont supérieurs que de 20% environ par rapport aux temps de transfert obtenus pour le transfert bi-entrées coplanaire. On souligne ainsi la bonne performance d'un transfert mono-entrée par rapport à un transfert bi-entrées coplanaire.



## 7.2.2 Suivi homotopique

Une fois que les problèmes initiaux ( $P_0$ ) ont été résolus, nous appliquons l'algorithme de suivi homotopique présenté dans la table 7.1 page ci-contre. Les valeurs numériques utilisées dans l'algorithme sont :

- $\lambda^* = 0,9999 = 1 - 1e - 4$  ;
- $\lambda_{\text{step}}^0 \in \{1e - 1, 1e - 2, 1e - 3\}$  ;
- $\alpha = 1e - 1$  ;
- $\lambda_{\text{step}}^{\min} = 1e - 6$ .

### 7.2.2.1 Qualité du suivi

Dans les tables 7.3 page 72 et 7.4 page 73, nous donnons en fonction de la poussée maximale  $F_{\max}$  et du pas initial de progression  $\lambda_{\text{step}}^0$  :

- le nombre d'étapes  $N$  nécessaires ;
- la valeur  $\lambda_N$  du paramètre homotopique atteint lorsque l'algorithme s'arrête au bout de ces  $N$  étapes ;
- le temps d'exécution de ces  $N$  étapes<sup>1</sup> ;
- la valeur de la norme de la fonction de tir  $\|S_{\lambda_N}(T, p_0)\|$  lorsque le suivi a réussi (c'est-à-dire lorsque  $\lambda_N$  est suffisamment proche de  $\lambda^*$ ) ; dans le cas contraire, la mention SNC (pour *suivi non convergent*) est présente.

La première différence marquante entre les deux homotopies que l'on peut constater est que le suivi est considérablement plus aisé dans le cas de l'homotopie sur l'inclinaison, notamment pour  $\lambda_{\text{step}}^0 = 0, 1$  et pour les poussées en-dessous de 6 Newtons. Toutefois, pour les valeurs de  $F_{\max}$  où les deux homotopies convergent, on observe un temps de calcul moindre pour l'homotopie sur le domaine de contrôle.

Les chiffres nous montrent pour les deux homotopies (lorsqu'elles convergent), deux comportements logiques et attendus :

- plus  $\lambda_{\text{step}}^0$  est petit, plus le nombre  $N$  d'étapes et le temps de calcul sont élevés : cela vient directement de la nature de l'algorithme ;
- plus la poussée  $F_{\max}$  est faible, plus le temps de transfert est grand, donc plus le calcul de la fonction de tir est long : ainsi pour un même nombre d'étapes, le temps d'exécution pour une poussée moins importante est plus grand. De plus, compte tenu de la difficulté numérique grandissante au fur et à mesure que  $F_{\max}$  diminue. On observe une perte de précision dans la résolution de l'équation de tir.

### 7.2.2.2 Qualité des résultats (temps finaux)

Nous présentons dans la table 7.5 page 74 les temps finaux  $T$  des extrémales obtenues pour  $\lambda = \lambda_N$  lorsque le suivi s'est bien passé (*i.e.* pas de mention SNC dans les cases correspondantes des tables 7.3 ou 7.4 ; dans le cas contraire, on reporte encore la mention SNC). Les valeurs obtenues directement par la méthode de

<sup>1</sup>Ce temps ne comprend pas le calcul des points conjugués (voir plus loin).

tir (cf. table 3.2 page 34) sont également rappelées pour faciliter la comparaison. La figure 7.1 de la présente page donne le graphe de l'évolution du temps de transfert en fonction de la poussée maximale  $F_{\max}$  pour les trois cas (tir sans homotopie, homotopie sur le domaine de contrôle et homotopie sur l'inclinaison finale).

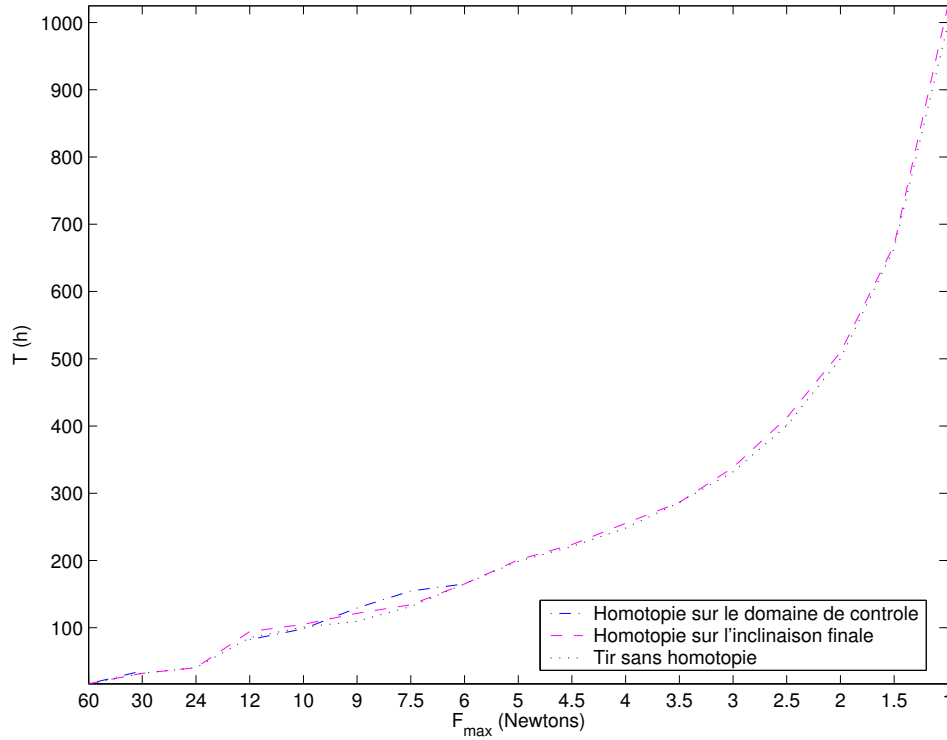


FIG. 7.1 – Évolution du temps de transfert  $T$  en fonction de  $F_{\max}$

Excepté pour  $F_{\max} = 60$  Newtons et  $F_{\max} = 6$  Newtons, les deux homotopies estiment en général le temps de transfert par excès. Cette observation valide la bonne qualité du tir sans homotopie effectué dans le **Chapitre 3**, bien que le nombre de commutations soit élevé.

### 7.2.2.3 Évolution de la poussée le long du chemin

Les figures 7.2 page ci-contre et 7.3 page 68 montrent l'évolution du contrôle optimal le long du chemin homotopique pour  $F_{\max} = 6$  Newtons.

En étudiant plus particulièrement l'évolution de la composante tangentielle  $u_t$ , nous pouvons observer que le contrôle optimal obtenu pour  $\lambda = 0$  est une première approximation du contrôle optimal obtenu en  $\lambda = 1$ . Dans le cas de l'homotopie sur l'inclinaison, on peut même dire qu'il s'agit une excellente approximation. Cela veut donc dire que même si les commutations n'existent pas encore, on peut déjà deviner leurs emplacements (avec plus ou moins de précision selon l'homotopie utilisée) en analysant le contrôle optimal du problème  $(P_0)$ . À noter que des

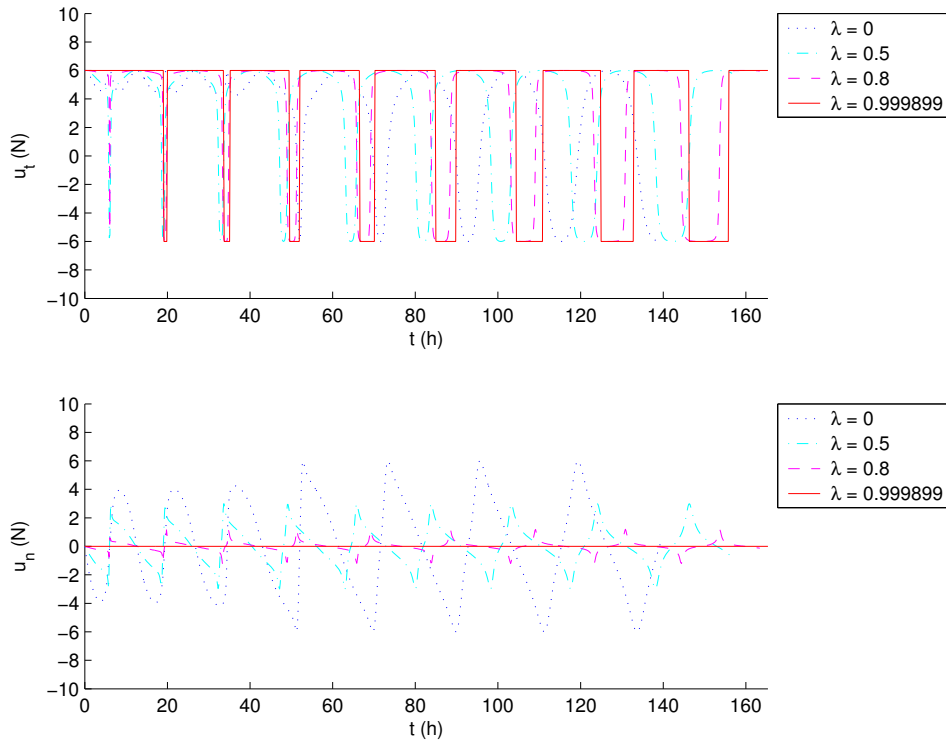


FIG. 7.2 – Évolution du contrôle optimal (homotopie sur le domaine de contrôle)

constatations du même ordre ont pu être faites en ce qui concerne les solutions du problème de minimisation de l'énergie par rapport au problème de maximisation de la masse finale [40, 41].

### Quelle homotopie ?

À beaucoup d'égards, la continuation sur l'inclinaison finale est plus intéressante que celle sur le domaine de contrôle. Bien que le calcul des extrémales du problème  $(P_0)$  soit légèrement plus lente, la résolution du problème bi-entrées non-coplanaire fournit une excellente approximation de la solution du problème mono-entrée comme le montrent les temps de transfert obtenus en première analyse. Cette constatation est renforcée par la comparaison des poussées optimales très proche.

On vérifie en fait que, dans le cas de l'homotopie sur l'inclinaison, la structure finale des commutations est quasiment observable dès la première itération.

Physiquement, ce résultat s'explique en étudiant la structure du système différentiel du problème. En effet, la composante hors-plan  $u_c$  est naturellement découplée des deux autres composantes. Quand les composantes tangentielle  $u_t$  et normale  $u_n$  interviennent toutes deux sur la forme de l'orbite  $(P, \vec{e})$ , la composante hors-plan  $u_c$  n'agit que sur l'inclinaison de l'orbite  $\vec{h}$ .

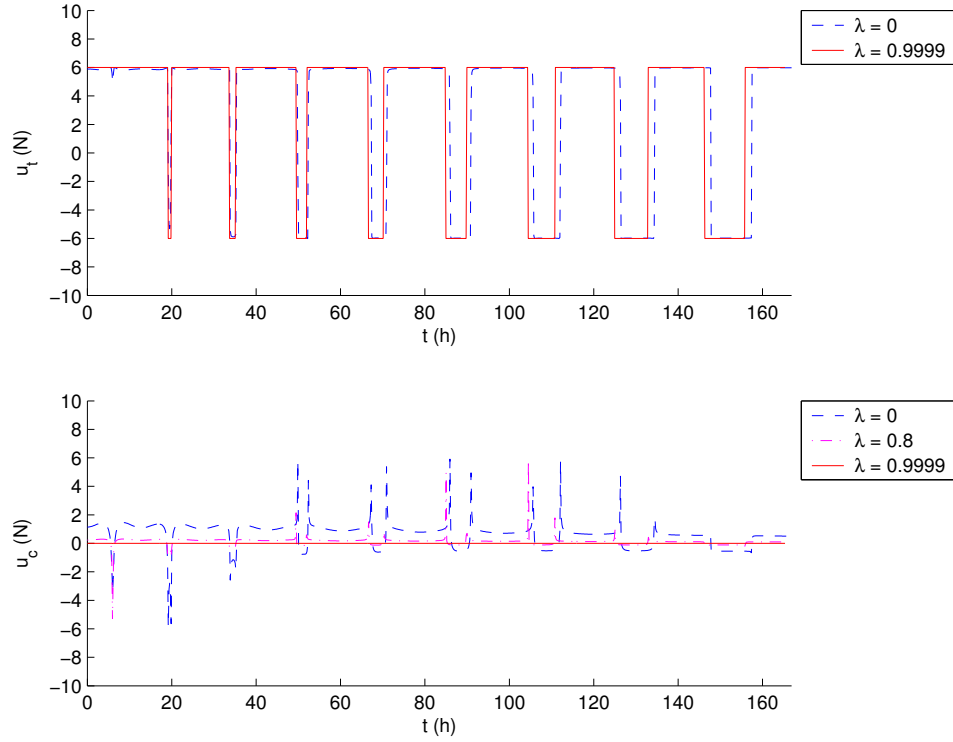


FIG. 7.3 – Évolution du contrôle optimal (homotopie sur l'inclinaison initiale)

L'introduction d'une composante hors-plan  $u_c$  pour l'homotopie sur l'inclinaison initiale modifie donc peu la forme de l'orbite par rapport au cas coplanaire, ce qui explique la proximité des solutions en  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 1$  pour cette homotopie.

### 7.2.3 Points conjugués

Le cadre naturel du calcul de points conjugués étant l'extrémale à extrémités fixées, on s'intéresse en pratique à des problèmes à longitude finale fixée (cette longitude finale étant d'autant plus grande que  $F_{\max}$  est petit).

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.3 page 26, les points conjugués peuvent être déterminés en détectant une perte de rang : ici c'est le premier point conjugué qui nous intéresse plus particulièrement, car c'est celui-ci qui est crucial pour établir l'optimalité locale. Deux méthodes sont possibles et implémentées dans COTCOT [21] :

- la matrice dont le rang est à étudier est de taille  $n - 1$  par  $n$ , on peut alors y adjoindre un nouveau vecteur indépendant afin d'obtenir une matrice carrée d'ordre  $n$  et la perte de rang devient l'annulation du déterminant de cette nouvelle matrice ;
- on peut également calculer la plus petite (*i.e.* la  $n - 1^{\text{ème}}$ ) valeur singulière et la perte de rang devient l'annulation de cette valeur singulière.

Nous présentons dans les figures 7.4 de la présente page et 7.5 page suivante l'évolution de la plus petite valeur singulière le long du chemin homotopique pour  $F_{\max} = 6$  Newtons avec une longitude finale  $l(T)$  fixée à 62 radians. Chaque extrémale a été prolongée jusqu'à quatre fois son temps de transfert.

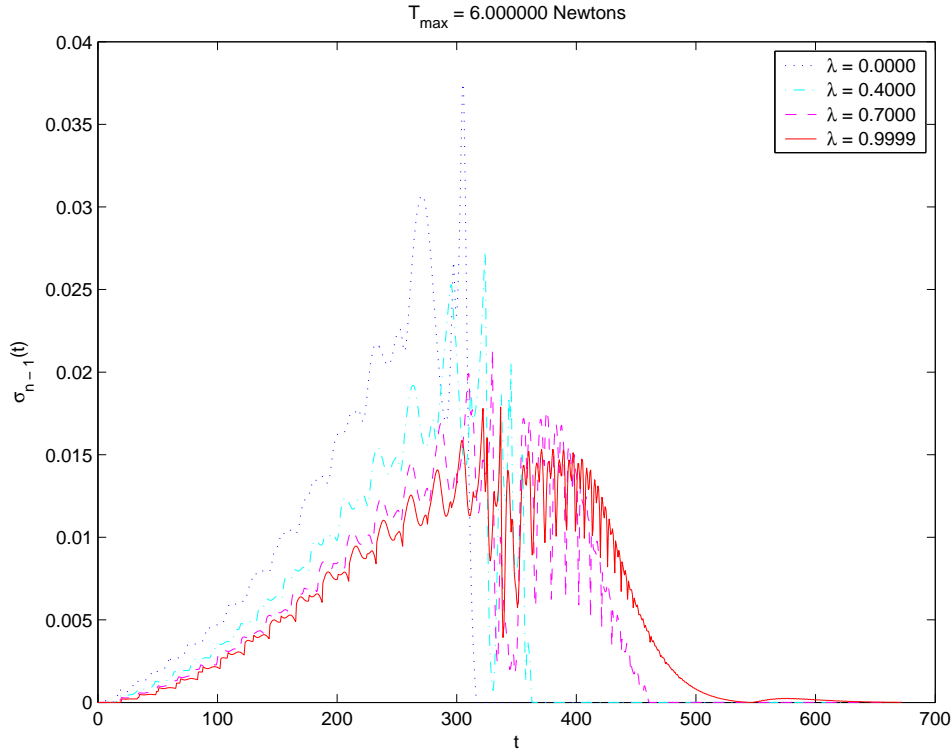


FIG. 7.4 – Évolution de la dernière valeur singulière (homotopie sur le domaine de contrôle,  $l(T) = 62$  rad)

Une analyse fine des graphes montrent que les premiers points conjugués apparaissent autour de trois fois et demi le temps de transfert, ce qui nous permet de conclure sur l'optimalité locale. Ces temps conjugués semblent converger dans les deux cas vers une valeur autour de  $t_c = 545,08$  h (rappelons que le temps de transfert trouvé est  $T = 165,32$  h, soit un rapport de 3,3 environ).

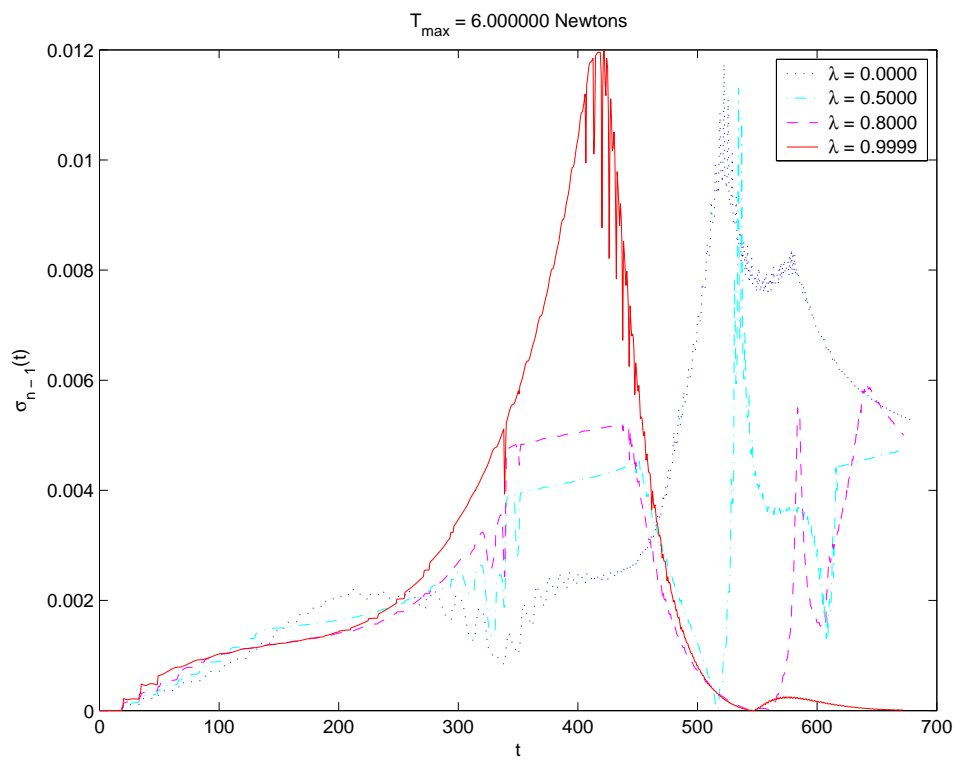


FIG. 7.5 – Évolution de la dernière valeur singulière (homotopie sur l'inclinaison initiale,  $l(T) = 62 \text{ rad}$ )

$F_{\max}$	$T$ (h)	$\ S_0(T, p_0)\ $	$t_{\text{exec}}$
60,0 N	14,73	7,84E−14	0,08 s
30,0 N	31,45	4,03E−13	0,50 s
24,0 N	36,34	1,95E−13	0,64 s
12,0 N	69,29	2,53E−13	1,15 s
10,0 N	83,53	2,13E−13	0,80 s
9,0 N	93,19	3,20E−13	1,04 s
7,5 N	111,64	4,53E−13	7,56 s
6,0 N	139,38	3,68E−13	1,73 s
5,0 N	166,33	4,53E−13	6,43 s
4,5 N	186,05	1,07E−12	5,22 s
4,0 N	208,43	9,32E−13	1,70 s
3,5 N	240,35	6,03E−13	5,54 s
3,0 N	277,91	5,04E−13	2,10 s
2,5 N	335,92	1,78E−12	7,13 s
2,0 N	418,39	1,24E−12	7,46 s
1,5 N	560,10	1,14E−11	8,90 s
1,0 N	838,12	6,14E−11	15,44 s

(a) Cas coplanaire

$F_{\max}$	$T$ (h)	$\ S_0(T, p_0)\ $	$t_{\text{exec}}$
60,0 N	17,24	5,15E−14	0,38 s
30,0 N	32,54	7,70E−13	2,28 s
24,0 N	41,12	5,34E−13	2,13 s
12,0 N	94,78	8,99E−13	7,06 s
10,0 N	105,77	6,63E−13	3,16 s
9,0 N	122,20	5,80E−13	2,78 s
7,5 N	135,32	1,45E−12	5,21 s
6,0 N	166,86	1,28E−12	5,94 s
5,0 N	203,18	3,02E−13	8,01 s
4,5 N	226,17	4,12E−12	5,85 s
4,0 N	258,93	3,32E−12	15,75 s
3,5 N	289,77	2,04E−12	12,36 s
3,0 N	343,46	1,94E−11	6,60 s
2,5 N	418,86	1,31E−12	6,60 s
2,0 N	516,68	2,02E−11	28,66 s
1,5 N	676,48	1,16E−11	20,28 s
1,0 N	1032,47	1,47E−10	61,07 s

(b) Cas non-coplanaire

TAB. 7.2 – Résolution de l'équation de tir pour les transferts bi-entrées  
 Contribution à l'étude du contrôle optimal des transferts orbitaux mono-entrée

$F_{\max}$	$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-1$				$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-2$				$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-3$			
	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $
60,0 N	46	0,9999	13,28 s	4,32E-13	117	0,9998	23,95 s	7,79E-13	1008	0,9998	177,26 s	8,27E-13
30,0 N	37	0,9999	12,64 s	1,02E-08	117	0,9998	38,91 s	1,68E-11	1008	0,9998	316,44 s	2,87E-11
24,0 N	20	0,430029	223,17 s	SNC	52	0,430025	79,21 s	SNC	439	0,430025	208,77 s	SNC
12,0 N	37	0,9999	24,25 s	2,43E-12	117	0,9998	62,18 s	4,06E-13	1008	0,9998	543,34 s	1,98E-13
10,0 N	5	0,4000	5,77 s	SNC	117	0,9998	82,56 s	1,19E-12	1008	0,9998	698,96 s	5,25E-12
9,0 N	74	0,542174	75,71 s	SNC	117	0,9998	90,86 s	1,56E-12	1008	0,9998	714,77 s	7,08E-13
7,5 N	37	0,9999	42,10 s	7,56E-12	117	0,9998	110,40 s	1,97E-12	1008	0,9998	829,93 s	4,93E-12
6,0 N	699903	0,999899	685339,89 s	4,38E-08	117	0,9998	138,36 s	1,47E-09	1008	0,9998	1482,62 s	1,43E-10
5,0 N	63	0,549255	1232,80 s	SNC	61	0,456017	106,87 s	SNC	466	0,456017	691,76 s	SNC
4,5 N	40	0,536594	96,46 s	SNC	85	0,536594	170,67 s	SNC	555	0,536594	944,85 s	SNC
4,0 N	2	0,1000	7,72 s	SNC	42	0,18324	203,39 s	SNC	216	0,18324	641,92 s	SNC
3,5 N	28	0,565290	105,59 s	SNC	81	0,565284	189,40 s	SNC	585	0,565284	1093,62 s	SNC
3,0 N	95	0,463397	214,79 s	SNC	53	0,414016	191,17 s	SNC	421	0,414015	1112,78 s	SNC
2,5 N	37	0,9999	194,66 s	4,73E-09	68	0,496372	552,51 s	SNC	482	0,464347	1253,82 s	SNC
2,0 N	27	0,170738	133,03 s	SNC	103	0,775301	3344,83 s	SNC	788	0,775300	3313,92 s	SNC
1,5 N	77	0,058863	438,32 s	SNC	30	0,072491	382,74 s	SNC	92	0,072491	676,16 s	SNC
1,0 N	31039	0,410343	179395,65 s	SNC	61	0,168688	788,77 s	SNC	451	0,431564	3739,82 s	SNC

TAB. 7.3 – Suivi homotopique pour la continuation sur le domaine du contrôle



$F_{\max}$	$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-1$				$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-2$				$\lambda_{\text{step}}^0 = 1e-3$			
	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $	$N$	$\lambda_N$	$t_{\text{exec}}$	$\ S_{\lambda_N}(T, p_0)\ $
60,0 N	37	0,9999	27,65 s	4,32E-13	117	0,9998	62,06 s	6,55E-13	1008	0,9998	528,05 s	7,53E-13
30,0 N	37	0,9999	29,19 s	1,14E-12	117	0,9998	79,30 s	6,87E-13	1008	0,9998	481,54 s	8,24E-13
24,0 N	37	0,9999	39,00 s	6,69E-13	117	0,9998	89,78 s	1,87E-13	1008	0,9998	595,55 s	2,23E-13
12,0 N	37	0,9999	128,79 s	9,01E-13	117	0,9998	270,68 s	1,24E-12	1008	0,9998	1897,33 s	1,82E-12
10,0 N	37	0,9999	124,66 s	2,54E-13	117	0,9998	248,74 s	2,09E-12	1008	0,9998	1869,86 s	6,41E-13
9,0 N	37	0,9999	146,77 s	4,87E-12	117	0,9998	290,71 s	3,31E-13	1008	0,9998	2087,42 s	9,82E-13
7,5 N	37	0,9999	139,44 s	3,62E-13	117	0,9998	322,08 s	1,76E-12	1008	0,9998	2216,86 s	1,01E-12
6,0 N	37	0,9999	178,48 s	4,55E-12	117	0,9998	426,12 s	9,74E-13	1008	0,9998	2611,87 s	6,37E-13
5,0 N	37	0,9999	139,42 s	7,47E-12	117	0,9998	445,63 s	1,00E-11	1684	0,9999	5071,17 s	8,57E-08
4,5 N	37	0,9999	224,11 s	3,00E-11	117	0,9998	498,35 s	6,24E-13	1575	0,999821	5238,32 s	1,56E-07
4,0 N	63	0,999899	367,55 s	4,90E-07	123	0,999409	525,97 s	5,57E-07	1008	0,9998	2929,52 s	1,23E-11
3,5 N	144	0,999899	833,92 s	1,84E-07	219	0,999874	1104,14 s	3,06E-08	1019	0,999531	3356,14 s	6,79E-07
3,0 N	1178	0,999891	6253,88 s	2,51E-07	342	0,999875	1887,81 s	7,34E-08	1045	0,9999	3795,15 s	6,12E-08
2,5 N	141	0,999824	1038,40 s	8,57E-08	812	0,999808	5007,81 s	4,28E-08	1019	0,999791	4263,79 s	7,34E-08
2,0 N	1020	0,999695	9362,70 s	1,60E-07	749	0,999206	5490,82 s	2,43E-07	1347	0,999619	8358,03 s	6,52E-08
1,5 N	5511	0,998344	49897,20 s	1,59E-07	145	0,999522	1624,88 s	9,22E-08	1214	0,999243	9942,05 s	9,30E-08
1,0 N	69	0,999138	2155,93 s	1,96E-07	7615	0,991984	109460,98 s	1,41E-07	Temps de calcul trop long			

TAB. 7.4 – Suivi homotopique pour la continuation sur l'inclinaison initiale

$F_{\max}$	$\mathcal{H}_1 [\lambda_{\text{step}}^0]$	$\mathcal{H}_2 [\lambda_{\text{step}}^0]$	Tir
60,0N	16,75 h [0,1]	16,75 h [0,1]	16,74 h
30,0N	35,90 h [0,1]	32,31 h [0,1]	32,31 h
24,0N	SNC	40,77 h [0,1]	40,76 h
12,0N	82,44 h [0,1]	94,50 h [0,1]	85,44 h
10,0N	98,51 h [0,01]	105,21 h [0,1]	101,02 h
9,0N	129,36 h [0,001]	121,62 h [0,1]	109,67 h
7,5N	154,76 h [0,1]	134,20 h [0,1]	131,67 h
6,0N	165,32 h [0,1]	165,32 h [0,1]	165,32 h
5,0N	SNC	201,08 h [0,1]	198,98 h
4,5N	SNC	223,77 h [0,1]	220,81 h
4,0N	SNC	255,30 h [0,1]	248,15 h
3,5N	SNC	286,33 h [0,1]	286,43 h
3,0N	SNC	338,52 h [0,001]	331,93 h
2,5N	401,11 h [0,1]	412,16 h [0,1]	400,47 h
2,0N	SNC	509,68 h [0,1]	500,07 h
1,5N	SNC	669,21 h [0,01]	663,96 h
1,0N	SNC	1024,82 h [0,1]	997,09 h

La valeur de  $\lambda_{\text{step}}^0$  choisie est donnée entre crochets.

$\mathcal{H}_1$  : Homotopie sur le domaine de contrôle

$\mathcal{H}_2$  : Homotopie sur l'inclinaison finale

Tir : Méthode de tir sans homotopie

TAB. 7.5 – Comparaison des temps de transfert obtenus

# Conclusion

## Bilan

L'étude du transfert orbital mono-entrée et en particulier le problème en temps minimum nous a permis de confirmer la spécificité de ce type de transfert, bien que s'inscrivant logiquement dans la famille des transferts orbitaux.

Comme pour le transfert bi-entrée coplanaire, l'application des théorèmes classiques de contrôlabilité a permis d'établir que le transfert coplanaire mono-entrée reste contrôlable, en dépit de la réduction des degrés de liberté de la poussée.

De plus, les valeurs des temps de transfert sont peu dégradées par rapport au transfert coplanaire : on observe une augmentation de vingt pour cent seulement environ.

Contrairement aux transferts étudiés auparavant, nous avons également pu établir que le contrôle mono-entrée était discontinu. L'étude des approximations lisses développées pour remédier à ce constat a permis de mettre en évidence de nouveaux résultats.

Ainsi l'utilisation du problème de minimisation de l'énergie avec relaxation de la contrainte de contrôle comme approximation Riemannienne intégrable lisse du transfert mono-entrée nous a permis d'établir avec précision la structure des transferts vers des orbites circulaires. Outre la mise en évidence de la platitude (inconnue jusqu'alors) du système dans le cas des transferts vers des orbites circulaires, des restrictions sur l'existence de solution du problème moyenné ont été établies, qui traduisent la non-convexité inhérente à l'approximation réalisée.

De même l'utilisation de deux types de transferts bi-entrées (coplanaire et non-coplanaire) comme approximations lisses a permis une étude approfondie des conditions du second ordre sur ces approximations et a également validé la méthode du tir simple pour le transfert mono-entrée qui s'avère au final très efficace, malgré les nombreuses commutations du contrôle (autour de quatre-vingt-dix pour  $F_{\max} = 1$  Newton).

## Perspectives

Dans le cadre de l'approximation Riemannienne, l'étude exhaustive de la métrique Riemannienne doit être complétée avec l'analyse de la métrique complète en

dimension trois. Enfin, la continuation entre l'approximation Riemannienne de la minimisation de l'énergie et le problème cible du temps minimum est en cours de réalisation.

Afin de réaliser une analyse pertinente de nos résultats avec les méthodes de continuation, nous devons les comparer aux récentes implantations des conditions du second-ordre dans le cas bang-bang [51]. Les résultats de convergence sont à affiner, notamment pour les contrôles extrémaux obtenus les longs des différentes homotopies traitées. La régularité des points conjugués par rapport au paramètre homotopique est également à préciser.

Dans un second temps, il faudra également mettre en place des outils numériques plus adaptés. Ainsi, les méthodes variationnelles ou à base de différentiation interne fournissent de meilleurs résultats qu'un simple intégrateur de type RK45 ; dans le cas d'équations différentielles à second membre discontinu, la détection préalable des instants de commutations s'est révélée très efficace.

Le suivi homotopique peut être affiné, notamment dans le cas de l'homotopie sur le domaine de contrôle, en utilisant des mécanismes de suivi de type prédicteur-correcteur [5] développés par exemple dans le cas du transfert 3D pour le problème de minimisation de la masse [41].

Enfin, le problème de minimisation de la masse peut être étudié dans le cas mono-entrée en utilisant par exemple les études faites ces dernières années [41, 50].

Le problème de transfert mono-entrée, comme ses grands frères, est donc une source renouvelée de travaux passionnants. Affaire à suivre. . .

# Annexes



## Annexe A

# Construction de transferts d'orbites sous-optimaux

### Motivation

Dans cet annexe, nous proposons une méthode **analytique** — c'est-à-dire qui fournit une expression mathématique exacte — de construction d'un transfert. Le transfert ainsi obtenu est exprimé avec des fonctions usuelles simples (polynômes de degré deux et fonctions trigonométriques). De plus, la méthode de construction permet une reparamétrisation du transfert à chaque péricée.

Nous traitons uniquement le transfert *coplanaire* et nous décomposons la poussée dans le repère *radial-orthoradial* (cf. page 30). La poussée  $u$  s'écrit donc  $u = u_r F_r + u_{or} F_{or}$ .

### A.1 Construction des formes implicites

#### A.1.1 Préliminaires

**Notations** Étant donnés les paramètres orbitaux  $P$ ,  $e_x$ ,  $e_y$  et  $l$ , on définit les vecteurs  $\vec{\tau} = (\cos l, \sin l)$  et  $\vec{e} = (e_x, e_y)$  ainsi que :

$$\begin{aligned}\vec{\eta} &= (\eta_x, \eta_y) = \vec{e} + \vec{\tau} = (e_x + \cos l, e_y + \sin l) \\ W &= \eta_x \cos l + \eta_y \sin l = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l > 0 \quad \left( \text{car } \sqrt{e_x^2 + e_y^2} < 1 \right) \\ D &= \eta_x \sin l - \eta_y \cos l = e_x \sin l - e_y \cos l.\end{aligned}$$

**Caractérisation des péricées et des apogées** Il est possible de caractériser les péricées à l'aide des quantités  $D$  et  $W$  :

**Proposition A.1.**  $x$  est un péricée (respectivement un apogée) si et seulement si  $D = 0$  et  $W \geq 1$  (respectivement  $D = 0$  et  $W \leq 1$ ).

*Démonstration.* Géométriquement, on est au périégée lorsque la longitude  $l$  coïncide avec l'argument du périégée, c'est-à-dire lorsque le vecteur excentricité  $\vec{e}$  et le vecteur  $\vec{\tau}$  sont colinéaires et dans le même sens. Cela s'écrit  $\det(\vec{\eta}, \vec{\tau}) = 0$  et  $(\vec{e} | \vec{\tau}) \geq 0$ , i.e.  $D = 0$  et  $W \geq 1$ .

On se situe à l'apogée lorsque les vecteurs  $\vec{e}$  et  $\vec{\tau}$  sont colinéaires et de sens opposés. Alors on a  $\det(\vec{\eta}, \vec{\tau}) = 0$  et  $(\vec{e} | \vec{\tau}) \leq 0$ , c'est-à-dire  $D = 0$  et  $W \leq 1$ .  $\square$

**Reformulation de la dynamique** Dans le cadre ainsi défini, le système de transfert orbital s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_0(x) + \frac{u_r}{m} F_r(x) + \frac{u_{or}}{m} F_{or}(x) \quad , \quad \sqrt{u_r^2 + u_{or}^2} \leq F_{\max} \\ &= F_0(x) + \gamma_r F_r(x) + \gamma_{or} F_{or}(x) \end{aligned}$$

où l'on note  $\gamma = u/m$ ,  $x = (P, e_x, e_y, l)$  et :

$$F_0(x) = \sqrt{\frac{\mu}{P}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W/P \end{pmatrix}, F_r(x) = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{pmatrix} 2P/W \\ \cos l + \eta_x/W \\ \sin l + \eta_y/W \\ 0 \end{pmatrix}, F_{or}(x) = \sqrt{\frac{P}{\mu}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin l \\ -\cos l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\dot{l} = \sqrt{\mu} W^2 / P^{3/2} > 0$  ne dépend ni du temps ni du contrôle<sup>1</sup> et on peut donc reformuler la dynamique en prenant la longitude  $l$  comme nouvelle variable indépendante à la place du temps. On note encore  $x = (P, e_x, e_y)$  et on a le système :

$$\frac{dx}{dl}(l) = \gamma_r(l) \tilde{F}_r(l, x(l)) + \gamma_{or}(l) \tilde{F}_{or}(l, x(l)) \quad , \quad \forall l \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_r(l, x) &= \frac{1}{\dot{l}} F_r(x, l) = \frac{P^2}{\mu W^2} \begin{pmatrix} 2P/W \\ \cos l + \eta_x/W \\ \sin l + \eta_y/W \end{pmatrix} \\ \tilde{F}_{or}(l, x) &= \frac{1}{\dot{l}} F_{or}(x, l) = \frac{P^2}{\mu W^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin l \\ -\cos l \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### A.1.2 Formes implicites

L'idée principale de la méthode présentée dans cet annexe est d'exhiber des conditions d'admissibilité pour un transfert **où seules les composantes de l'état  $x$  apparaissent**, c'est-à-dire où le contrôle  $u$  n'intervient pas. De telles équations seront appelées *formes implicites*.

Nous pouvons formuler la première forme implicite dans la proposition suivante :

<sup>1</sup>Ce qui n'est pas le cas pour le transfert général 3D, où  $\dot{l}$  dépend de la composante hors-plan  $u_c$  de la poussée



**Proposition A.2 (Première forme implicite).** *La trajectoire  $x$  est admissible si et seulement si :*

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{1}{P} \right) + \frac{d}{dl} \left( \frac{e_x}{P} \right) \cos l + \frac{d}{dl} \left( \frac{e_y}{P} \right) \sin l = 0 \quad , \quad \forall l. \quad (\text{A.2})$$

*Démonstration.* La trajectoire  $x : l \mapsto x(l)$  est simplement admissible

$$\iff \forall l, \frac{dx}{dl}(l) \in \text{Im} \tilde{F}(l, x(l)). \text{ avec } \tilde{F}(l, x(l)) = [\tilde{F}_r(l, x(l)) \quad \tilde{F}_{or}(l, x(l))]$$

Le sous-espace vectoriel  $\text{Im} \tilde{F}(l, x(l))$  de  $\mathbf{R}^3$  vérifie par définition :

$$\text{Im} \tilde{F}(l, x(l)) = \text{Vect}\{\tilde{F}_r(l, x(l)), \tilde{F}_{or}(l, x(l))\}$$

et les deux vecteurs forment une base par hypothèse. Donc  $(\text{Im} \tilde{F}(l, x(l)))^\perp$  est de dimension 1 et est engendré par le vecteur  $\tilde{F}_c(l, x(l)) = \tilde{F}_r(l, x(l)) \wedge \tilde{F}_{or}(l, x(l))$ .

Tous calculs faits, on a  $\tilde{F}_c(l, x(l)) = \frac{2P^5}{\mu^2 W^5} \begin{pmatrix} -W/P \\ \cos l \\ \sin l \end{pmatrix}$ . d'où la condition :

$$-\frac{W}{P} \frac{dP}{dl} + (\cos l) \frac{de_x}{dl} + (\sin l) \frac{de_y}{dl} = 0.$$

On développe  $W = 1 + e_x \cos l + e_y \sin l$  et on divise cette équation par  $P$ . On fait alors apparaître les dérivées des quotients  $1/P$ ,  $e_x/P$  et  $e_y/P$  pour obtenir la relation (A.2).  $\square$

Cette relation permet de dériver de nombreuses autres formes implicites parmi lesquelles l'une des plus concises :

**Corollaire A.3.** *La trajectoire  $x$  est admissible si et seulement si*

$$\left( \frac{d}{dl} \left( \frac{\vec{\eta}}{P} \right) \middle| \vec{\tau} \right) = 0.$$

On obtient également :

**Corollaire A.4.** *La trajectoire  $x$  est admissible si et seulement si :*

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{W}{P} \right) = -\frac{D}{P}. \quad (\text{A.3})$$

Ce corollaire nous permet de déduire la forme suivante :

**Proposition A.5 (Deuxième forme implicite).** *La trajectoire  $x$  est admissible si et seulement si*

$$\frac{d}{dl} \left( \ln \frac{P}{W} \right) = \frac{D}{W}. \quad (\text{A.4})$$

*Démonstration.* Décomposons d'abord  $\frac{d}{dl} \left( \ln \frac{P}{W} \right)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \left( \ln \frac{P}{W} \right) &= \frac{\frac{d}{dl}(P/W)}{P/W} = \frac{W}{P} \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{W/P} \right) \\ &= \frac{W}{P} \cdot -\frac{1}{(W/P)^2} \frac{d}{dl} \left( \frac{W}{P} \right) \\ &= -\frac{P}{W} \frac{d}{dl} \left( \frac{W}{P} \right). \end{aligned}$$

Donc  $x$  est admissible

$$\begin{aligned} \iff \frac{d}{dl} \left( \frac{W}{P} \right) &= -\frac{D}{P} \text{ (cf. Corollaire A.4)} \\ \iff \frac{d}{dl} \left( \ln \frac{P}{W} \right) &= -\frac{P}{W} \cdot -\frac{D}{P} \\ \iff \frac{d}{dl} \left( \ln \frac{P}{W} \right) &= \frac{D}{W}. \end{aligned} \quad \square$$

De nombreuses autres formes peuvent être dérivées, voir [31].

## A.2 Reconstruction de l'état à partir des formes implicites

### A.2.1 Détermination d'un ensemble suffisant de fonctions

**Proposition A.6.** La première forme implicite s'intègre à l'aide de deux fonctions  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  définies comme suit :

$$\kappa_1 = \frac{d}{dl} \left( \frac{e_x}{P} \right), \quad \kappa_2 = \frac{d}{dl} \left( \frac{e_y}{P} \right)$$

est un noyau de la forme implicite (A.2).

*Démonstration.* Le processus de reconstruction de  $x$  est le suivant :

1. on intègre  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  :

$$\Phi_1(l) = \frac{e_x(l)}{P(l)} = \frac{e_x(0)}{P(0)} + \int_0^l \kappa_1(\lambda) d\lambda \quad (\text{A.5})$$

$$\Phi_2(l) = \frac{e_y(l)}{P(l)} = \frac{e_y(0)}{P(0)} + \int_0^l \kappa_2(\lambda) d\lambda \quad (\text{A.6})$$

2. on obtient  $\varphi_3 = \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{P} \right)$  à l'aide de la forme implicite :

$$\varphi_3(l) = -\kappa_1(l) \cos l - \kappa_2(l) \sin l \quad (\text{A.7})$$

3. on intègre  $\varphi_3$  :

$$\Phi_3(l) = \frac{1}{P(l)} = \frac{1}{P(0)} + \int_0^l \varphi_3(\lambda) d\lambda \quad (\text{A.8})$$

4. on en déduit alors l'état  $x$  :

$$P(l) = \frac{1}{\Phi_3(l)} \quad , \quad e_x(l) = \frac{\Phi_1(l)}{\Phi_3(l)} \quad , \quad e_y(l) = \frac{\Phi_2(l)}{\Phi_3(l)} \quad (\text{A.9})$$

5. en écrivant

$$\kappa_1 = \frac{1}{P} \frac{de_x}{dl} + e_x \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{P} \right) \quad , \quad \kappa_2 = \frac{1}{P} \frac{de_y}{dl} + e_y \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{P} \right)$$

on en déduit  $d\vec{e}/dl$  :

$$\frac{de_x}{dl}(l) = P(l)(\kappa_1(l) - e_x(l)\varphi_3(l)) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{de_y}{dl}(l) = P(l)(\kappa_2(l) - e_y(l)\varphi_3(l)). \quad (\text{A.11})$$

□

**Proposition A.7.** La deuxième forme implicite s'intègre à l'aide de deux fonctions  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  définies comme suit :

$$\kappa_3 = \|\vec{e}\| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \quad , \quad \kappa_4 = \frac{D}{W}$$

est un noyau de la forme implicite (A.4).

*Démonstration.* Le processus de reconstruction de  $x$  est le suivant :

1. en remarquant que  $D = \|\vec{e}\| \cos(l - \omega)$  et que  $W = 1 + \|\vec{e}\| \sin(l - \omega)$  avec  $\omega$  argument du périégée, il vient :

$$\kappa_4(l) = \frac{\kappa_3(l) \cos[l - \omega(l)]}{1 + \kappa_3(l) \sin[l - \omega(l)]}$$

et on tire  $\varphi_1(l) = \omega(l) = \arg \vec{e}(l)$ .

2. on peut alors calculer  $e_x$  et  $e_y$  et leurs dérivées :

$$e_x(l) = \kappa_3(l) \cos \varphi_1(l) \quad , \quad e_y(l) = \kappa_3(l) \sin \varphi_1(l)$$

$$\frac{de_x}{dl}(l) = \frac{d\kappa_3}{dl}(l) \cos \varphi_1(l) - \kappa_3(l) \frac{d\varphi_1}{dl}(l) \sin \varphi_1(l)$$

$$\frac{de_y}{dl}(l) = \frac{d\kappa_3}{dl}(l) \sin \varphi_1(l) + \kappa_3(l) \frac{d\varphi_1}{dl}(l) \cos \varphi_1(l)$$

3. on en déduit  $\varphi_2(l) = W(l) = 1 + e_x(l) \cos l + e_y(l) \sin l$ .

4. la forme implicite (A.4) s'écrit également  $\frac{d}{dl}(\ln P/W) = \kappa_4$ , ce qui permet d'obtenir  $P$  :

$$P(l) = \varphi_2(l) \frac{P(0)}{1 + e_x(0)} \exp \left( \int_0^l \kappa_4(\lambda) d\lambda \right). \quad \square$$

### A.2.2 Construction des fonctions

Maintenant que nous avons identifié les éléments permettant de retrouver l'état et le contrôle, nous allons présenter une méthode pour les générer.

#### A.2.2.1 Première forme implicite

Nous considérons l'étude d'une révolution : autrement dit, la longitude  $l$  parcourt l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et nous nous fixons  $x(0)$  et  $x(2\pi)$ . Si nous reprenons le processus de reconstruction de la première forme implicite, nous pouvons écrire (cf. étapes 1. et 3.) :

$$\begin{aligned}\Phi_1(2\pi) &= \frac{e_x(2\pi)}{P(2\pi)} = \frac{e_x(0)}{P(0)} + \int_0^{2\pi} \kappa_1(\lambda) d\lambda \\ \Phi_2(2\pi) &= \frac{e_y(2\pi)}{P(2\pi)} = \frac{e_y(0)}{P(0)} + \int_0^{2\pi} \kappa_2(\lambda) d\lambda \\ \Phi_3(2\pi) &= \frac{1}{P(2\pi)} = \frac{1}{P(0)} + \int_0^{2\pi} \varphi_3(\lambda) d\lambda\end{aligned}$$

Les valeurs initiale et finale de  $e_y$  pour le transfert *complet* (i.e. sur plusieurs révolutions) que nous considérons sont nulles. Donc les valeurs sur chaque révolution  $e_y(0)$  et  $e_y(2\pi)$  le seront également. De plus, on choisit  $\kappa_2 \equiv 0$ , ce qui revient notamment à  $e_y \equiv 0$  : donc  $D = e_x \cos l$  et les périégées se situent en  $l \equiv 0 [2\pi]$  (cf. **Proposition A.1**), ce qui justifie le choix de l'intervalle  $[0, 2\pi]$  pour la longitude  $l$ .

Enfin, on contraint le support de  $\kappa_1$  à être inclus dans  $[\delta/2, 2\pi - \delta/2]$  où  $\delta \in \mathbf{R}_+^*$  est un paramètre arbitraire<sup>2</sup>.

On obtient alors les relations suivantes pour  $\kappa_1$  :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \kappa_1(\lambda) d\lambda &= \frac{e_x(2\pi)}{P(2\pi)} - \frac{e_x(0)}{P(0)} \\ \int_0^{2\pi} \kappa_1(\lambda) \cos(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{P(0)} - \frac{1}{P(2\pi)}.\end{aligned}$$

De plus les relations (A.8) et (A.10) nous permettent d'écrire  $de_x/dl = P(1 + e_x \cos l) \kappa_1 = PW \kappa_1$ . Autrement dit,  $\|de_x/dl\|_\infty$  est dominée par  $\|\kappa_1\|_\infty$  — car  $PW$  est dominé par  $\|x\|_\infty(1 + 2\|x\|_\infty)$  —. Or  $\|\gamma\|_\infty$  est clairement dominée par  $\|de_x/dl\|_\infty$ . Ainsi on peut contrôler  $\|\gamma\|_\infty$  par le biais de  $\|\kappa_1\|_\infty$ .

Il s'agit donc de choisir  $\kappa_1$  avec une valeur de  $\|\kappa_1\|_\infty$  aussi faible que possible. Une possibilité est alors de résoudre le problème (P) d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } \|\kappa_1\|_\infty \\ \int_0^{2\pi} \kappa_1(\lambda) d\lambda = \frac{e_x(2\pi)}{P(2\pi)} - \frac{e_x(0)}{P(0)} \\ \int_0^{2\pi} \kappa_1(\lambda) \cos(\lambda) d\lambda = \frac{1}{P(0)} - \frac{1}{P(2\pi)} \end{cases}$$

<sup>2</sup>L'introduction de ce paramètre a été motivée par des valeurs élevées de la commande autour de  $l \equiv 0 [2\pi]$  (c'est-à-dire les périégées), diminuant considérablement l'efficacité de la méthode.

Malheureusement, la norme  $\|\cdot\|_\infty$  n'est pas suffisamment régulière pour permettre une résolution aisée. Il nous faut trouver une norme hilbertienne plus fine que  $\|\cdot\|_\infty$ . Les contraintes sur  $\kappa_1$  s'expriment naturellement en terme de produits scalaires sur l'espace de HILBERT  $L^2([0, 2\pi], \mathbf{R})$  : mais la norme induite  $\|\cdot\|_{L^2}$  n'est pas plus fine que la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

En vertu du lemme de POINCARÉ et des contraintes sur le support de  $\kappa_1$ , l'espace cherché est :

$$H_\delta^1 = H_0^1([0, 2\pi], \mathbf{R}) \cap \left\{ f \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}) \mid \text{supp } f \subset \left[ \frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2} \right] \right\}$$

où  $H_0^1([0, 2\pi], \mathbf{R})$  est l'espace de SOBOLEV :

$$H_0^1([0, 2\pi], \mathbf{R}) = \{ f \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}) \mid f' \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}) \wedge f(0) = f(2\pi) = 0 \}.$$

$H_\delta^1$  est un sous-espace hilbertien de  $H_0^1([0, 2\pi], \mathbf{R})$  muni du produit scalaire induit :

$$(f | g)_{H_\delta^1} = \int_0^{2\pi} f'(t)g'(t) dt = \int_{\delta/2}^{2\pi-\delta/2} f'(t)g'(t) dt.$$

Nous considérons alors le problème d'optimisation suivant :

$$(P_\delta) \begin{cases} \text{Min}_{\kappa_1 \in H_\delta^1} \|\kappa_1\|_{H_\delta^1} \\ (\kappa_1 | 1)_{L^2} = \frac{e_x(2\pi)}{P(2\pi)} - \frac{e_x(0)}{P(0)} \\ (\kappa_1 | \cos)_{L^2} = \frac{1}{P(0)} - \frac{1}{P(2\pi)}. \end{cases}$$

On réécrit les produits scalaires sur  $L^2([0, 2\pi], \mathbf{R})$  comme des produits scalaires sur  $H_\delta^1$  :

$$\begin{aligned} (\kappa_1 | 1)_{L^2} &= (\kappa_1 | h_1)_{H_\delta^1} \text{ avec } h_1 : l \mapsto \frac{1}{2}l(2\pi-l) - \frac{1}{2}\frac{\delta}{2}\left(2\pi - \frac{\delta}{2}\right) \\ (\kappa_1 | \cos)_{L^2} &= (\kappa_1 | h_2)_{H_\delta^1} \text{ avec } h_2 : l \mapsto \cos l - \cos\left(\frac{\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

avec  $h_1$  et  $h_2$  deux éléments de  $H_\delta^1$ , i.e. qui sont nulles en dehors de  $[\delta/2, 2\pi - \delta/2]$ .

Le problème  $(P_\delta)$  devient :

$$(P_\delta) \begin{cases} \text{Min}_{\kappa_1 \in H_\delta^1} \|\kappa_1\|_{H_\delta^1} \\ (\kappa_1 | h_1)_{H_\delta^1} = b_1 = \frac{e_x(2\pi)}{P(2\pi)} - \frac{e_x(0)}{P(0)} \\ (\kappa_1 | h_2)_{H_\delta^1} = b_2 = \frac{1}{P(0)} - \frac{1}{P(2\pi)}. \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre qu'un problème de projection hilbertienne de l'élément  $0_{H_\delta^1}$  sur une variété linéaire  $V$  de direction  $\{h_1, h_2\}^\perp$ . Le projeté  $\bar{\kappa}_1 \in V$  vérifie la condition  $\bar{\kappa}_1 - 0 \in V^\perp = \text{Vect}\{h_1, h_2\} : \bar{\kappa}_1 \in V \cap V^\perp$ .

On peut donc écrire  $\bar{\kappa}_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$  et la condition  $\bar{\kappa}_1 \in V$  s'écrit :

$$\alpha_1 (h_1 | h_1)_{H_\delta^1} + \alpha_2 (h_2 | h_1)_{H_\delta^1} = b_1$$

$$\alpha_1 (h_1 | h_2)_{H_\delta^1} + \alpha_2 (h_2 | h_2)_{H_\delta^1} = b_2$$

et  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  est donc la solution d'un système linéaire de dimension deux.

**Procédure de construction de  $\kappa_1$**  Nous résumons la méthode de construction de  $\kappa_1$ .

1. On se donne  $x(0)$  et  $x(2\pi)$  et on calcule le vecteur  $b = (b_1, b_2)$ .
2. On choisit une valeur  $\delta$  et on calcule la matrice de GRAM du couple  $(h_1, h_2)$  :

$$G_\delta = \begin{pmatrix} (h_1 | h_1)_{H_\delta^1} & (h_2 | h_1)_{H_\delta^1} \\ (h_1 | h_2)_{H_\delta^1} & (h_2 | h_2)_{H_\delta^1} \end{pmatrix}$$

3. On obtient alors  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = G_\delta^{-1} b$ , puis  $\kappa_1 = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ .

Une fois  $\kappa_1$  construit (rappelons que  $\kappa_2 \equiv 0$ ), on peut alors obtenir l'état  $x$  et la commande  $\gamma$  comme vu auparavant.

Remarquons que  $\kappa_1$  est une combinaison affine de **polynômes de degré deux** et de **fonctions trigonométriques**, ce qui rend les calculs ultérieurs de reconstruction très simples.

### A.2.2.2 Deuxième forme implicite

Si on cherche à analyser la stabilité au moins numérique du procédé que nous venons d'introduire, on observe que la condition  $\kappa_2 \equiv 0$ , *i.e.*  $e_y \equiv 0$  est très contraignante : en effet, une erreur sur  $e_y$  ne pourra pas être détectée et encore moins corrigée. Il nous faut donc nous affranchir de cette contrainte et relaxer les conditions sur  $e_y$ .

Comme pour la première forme, on travaille par révolution, de périégée à périégée. Cependant, comme  $e_y$  n'est plus nul à priori, l'intervalle d'évolution de  $l$  n'est plus exactement  $[0, 2\pi]$  et dépend explicitement de la valeur de l'état aux bornes (*i.e.* aux périégées). En effet, la relation  $D(l) = 0$  est équivalente à  $l \equiv \omega(l) [2\pi]$ .

Plus précisément, étant donnés deux états  $x_0$  et  $x_1$  correspondant à des périégées, on connaît alors les valeurs des arguments  $\omega_0 = \arg(\vec{e}_0)$  et  $\omega_1 = \arg(\vec{e}_1)$ . Alors la longitude  $l$  parcourt l'intervalle  $[l_0, l_1]$  avec  $l_0 \equiv \omega_0 [2\pi]$  et  $l_1 \equiv \omega_1 [2\pi]^3$ .

<sup>3</sup>On ne peut pas se contenter d'une égalité simple du type  $l = \omega$  car la largeur de l'intervalle doit approcher  $2\pi$  (le satellite doit faire un vrai tour !), ce qui ne serait pas toujours le cas avec une égalité directe.

Pour les mêmes raisons que dans le cas de la première forme, on contraint le support de la commande  $\gamma$ . Plus précisément, on se donne un paramètre  $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$  et on impose :

$$\text{supp } \gamma \subset [l_{\inf}, l_{\sup}] = \left[ l_{1/2} - \frac{\sigma}{2}, l_{1/2} + \frac{\sigma}{2} \right] \text{ avec } l_{1/2} = \frac{l_0 + l_1}{2}.$$

Dans la zone où  $\gamma \equiv 0$ , le système est un système de KEPLER libre et les paramètres orbitaux sont constants, c'est-à-dire que l'on a  $x(l) = x_0$  pour  $l \in [l_0, l_{\inf}]$  et  $x(l) = x_1$  pour  $l \in [l_{\sup}, l_1]$ . Notamment  $\kappa_3 = \|\vec{e}\|$  et  $\kappa_4 = D/W$  sont intégralement connues sur  $[l_0, l_{\inf}] \cup [l_{\sup}, l_1]$ .

Reste donc à définir  $\kappa_3$  et  $\kappa_4$  sur  $[l_{\inf}, l_{\sup}]$ . On procède comme suit :

1. On définit  $\kappa_3$  comme une fonction affine par morceaux, plus précisément :

$$\kappa_3(l) = \|\vec{e}(l)\| = \begin{cases} \|\vec{e}_0\| & \text{si } l \in [l_0, l_{\inf}] \\ \|\vec{e}_0\| + (\|\vec{e}_1\| - \|\vec{e}_0\|) \frac{l - l_{\inf}}{l_{\sup} - l_{\inf}} & \text{si } l \in [l_{\inf}, l_{\sup}] \\ \|\vec{e}_1\| & \text{si } l \in [l_{\sup}, l_1] \end{cases}$$

ce qui permet un calcul simple de  $d\vec{e}/dl$ .

2. Rappelons que  $d(\ln P/W)/dl = \kappa_4$ .  $P/W$  est également connu sur  $[l_0, l_{\inf}] \cup [l_{\sup}, l_1]$  et on définit  $\ln P/W$  entre  $l_{\inf}$  et  $l_{\sup}$  comme un polynôme de degré cinq en utilisant la méthode de HERMITE, c'est-à-dire que les valeurs de  $\ln P/W$  et de  $\kappa_4 = d(\ln P/W)/dl$  coïncident à gauche et à droite en  $l_{\inf}$  et  $l_{\sup}$ <sup>4</sup>. Les coefficients dudit polynôme sont solutions d'un système linéaire de dimension six et l'on déduit également  $\kappa_4$ .

On peut donc ainsi retrouver l'état  $x$  et la commande  $\gamma$ .

## A.3 Mise en œuvre pratique et simulations

### A.3.1 Algorithme général de construction

Dans le cas général, on se donne deux états quelconques  $x_0$  et  $x_f$  entre lesquels on veut effectuer un transfert avec une contrainte imposée sur la commande :  $\|\gamma\| \leq \Gamma_{\max}$ . Comme nous l'avons vu auparavant, nous allons subdiviser le segment  $[x_0, x_f]$  en plusieurs segments correspondant chacun à une révolution de la trajectoire globale finale. Sur chacune de ces révolutions, nous appliquons les procédures que nous venons de présenter.

Comme on ne connaît pas a priori le nombre de révolutions nécessaires pour satisfaire la contrainte, il faut augmenter le nombre de révolutions jusqu'à trouver le nombre minimum de révolutions, ce qui est explicité dans l'algorithme présenté dans la table A.1.

<sup>4</sup>On assure ainsi que  $\ln P/W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[l_0, l_1]$  et donc que  $\kappa_4$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $[l_0, l_1]$  par recollement.

0. On se donne :
  - un *état initial*  $x_0$  et un *état final cible*  $x_f$  ;
  - une borne de commande  $\Gamma_{\max}$  ;
  - un *nombre maximal de révolutions*  $N_{\max}$  au-delà duquel on arrête l'algorithme.
1.  $N \leftarrow 1$
2. On subdivise le segment  $[x_0, x_f]$  en  $N$  sous-segments  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  avec  $x_N = x_f$ .
3. Sur le segment numéro  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , on utilise une des procédures précédentes :
  - (a) On calcule l'intervalle  $[l_i, l_{i+1}]$  d'évolution de la longitude.
  - (b) On construit le noyau  $\mathcal{K}$  sur  $[l_i, l_{i+1}]$ .
  - (c) On calcule l'état sur l'intervalle avec  $x_i$  comme condition initiale et  $x_{i+1}$  comme condition finale.
  - (d) On en déduit l'expression de la commande  $\gamma_i$  sur  $[l_i, l_{i+1}]$ .
4. SI sur tous les segments de la subdivision, la contrainte  $\|\gamma_i\|_{\infty} \leq \Gamma_{\max}$ ,  
ALORS  
On construit la trajectoire finale en concaténant les trajectoires obtenues sur les  $N$  segments.  
L'algorithme s'arrête : il **réussit**.  
SINON  
 $N \leftarrow N + 1$   
On revient en 2.
5. L'algorithme s'arrête :
  - si la commande vérifie la contrainte (cf. plus haut) : l'algorithme **réussit** ;
  - si  $N$  atteint  $N_{\max}$  : l'algorithme **échoue**.

TAB. A.1 – Algorithme général de construction

### A.3.2 Résultats

#### A.3.2.1 Première forme implicite

**Subdivisions uniforme et non uniforme** Le choix de la subdivision uniforme sur le segment  $[x_0, x_f]$  est naturel :

$$x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x_f - x_0) \quad , \quad i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

Néanmoins, l'analyse des trajectoires optimales a permis de d'observer que le paramètre  $P$  augmentait de plus en plus vite au cours des révolutions. Il a donc paru intéressant de construire une subdivision *non uniforme* telle que les longueurs des



intervalles successifs  $[x_i, x_{i+1}]$  soit une suite géométrique de raison  $R_x > 1^5$  :

$$x_{i+1} - x_i = R_x(x_i - x_{i-1}) \quad , \quad i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

**Résultats** Nous présentons dans la table A.2 les résultats obtenus. On reprend les conditions initiales et finales de la table 3.1 page 33.  $N$  est le nombre de révolutions obtenues,  $T$  est le temps de transfert (obtenu par intégration de l'équation  $dt/dl = 1/\dot{l}$ ),  $c_T$  est le quotient du temps  $T$  par le temps minimum de transfert pour la même poussée  $F_{\max}$ ,  $m(T)$  est la masse finale en fin de transfert et  $F_{\text{eff}} = \|u\|_\infty$ . Il se peut en effet que la contrainte ne soit jamais saturée pendant le transfert. La mention N/C indique que l'on ne disposait pas de la valeur du temps minimum pour la poussée correspondante.

$F_{\max}$ (N)	$N$	$T$ (h)	$c_T$	$m(T)$ (kg)	$F_{\text{eff}}$ (N)
60,0	4	65,07	4,40	1366,31	56,05
30,0	8	129,34	4,64	1366,32	27,03
10,0	22	355,05	4,16	1366,33	9,65
7,5	29	467,97	4,05	1366,33	4,92
4,0	53	855,15	3,99	1366,33	3,99
3,0	80	1290,76	4,55	1366,33	2,64
2,5	85	1371,43	4,05	1366,33	2,488
2,0	106	1710,24	3,94	1366,33	1,995
1,0	212	3420,46	3,83	1366,33	0,997
0,9	235	3791,54	3,85	1366,33	0,899
0,8	265	4275,57	4,01	1366,33	0,798
0,7	302	4872,53	4,02	1366,33	0,700
0,6	353	5695,38	4,02	1366,33	0,599
0,5	423	6824,76	4,01	1366,33	0,500
0,4	529	8534,99	4,02	1366,33	0,400
0,3	705	11374,60	4,01	1366,33	0,300
0,2	1057	17053,83	4,01	1366,33	0,200
0,1	2114	34107,66	4,01	1366,33	0,100
0,075	2818	45466,13	N/C	1366,33	0,075

TAB. A.2 – Première forme implicite : résultats avec la subdivision uniforme

À titre de comparaison, on rappelle que la masse finale obtenue dans le cas d'un transfert en temps minimum se situe autour de 1343 kg, et que la masse minimale pour des temps équivalents<sup>6</sup> se situe autour de 1389 kg. Autrement dit, les transferts obtenus ici fournissent une valeur de la masse finale à mi-chemin et constituent donc un compromis tout à fait intéressant entre consommation et temps de transfert.

<sup>5</sup>Si  $R_x = 1$ , on retrouve la subdivision uniforme.

<sup>6</sup>Le problème de maximisation de la masse à temps final libre n'a pas de sens pour des poussées continues.

**Cas de la subdivision non uniforme** Quelques simulations nous ont permis d'obtenir de meilleurs temps de transfert<sup>7</sup> pour des subdivisions non uniformes (gain d'environ 25%, cf. table A.3).

$F_{\max}$ (N)	$R_x$	$N$	$c_T$
60	1,675	3	3,09
30	1,327	6	3,19

TAB. A.3 – Première forme implicite : quelques résultats avec la subdivision non uniforme

Nous présentons dans les figures A.1 et A.2 des trajectoires obtenues pour les deux types de subdivisions. Les vecteurs de poussée est représentés sur les trajectoires. La courbe d'erreur A.1(b) est obtenue en comparant l'état calculé par notre méthode et l'état obtenu par intégration numérique de la dynamique en y injectant la commande obtenue.

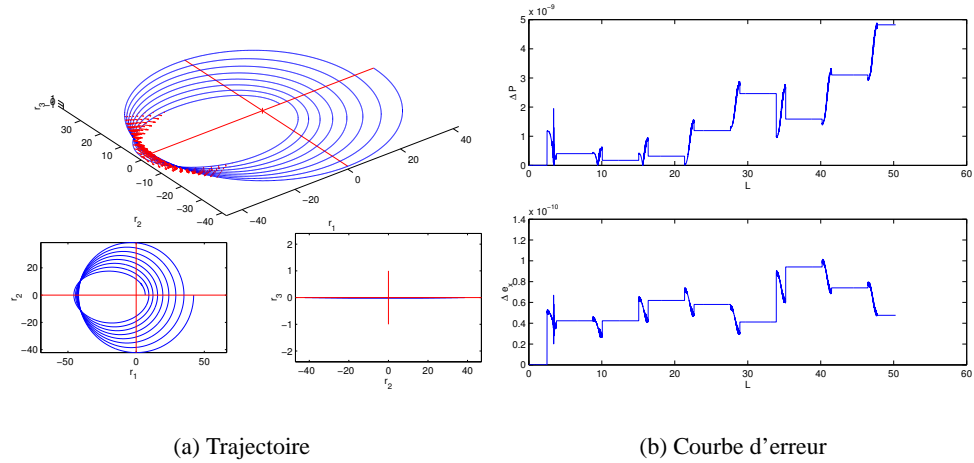


FIG. A.1 – Trajectoire pour  $F_{\max} = 30$  Newtons, subdivision uniforme

### A.3.2.2 Deuxième forme implicite

Dans ce cas, nous cherchons ici à nous rapprocher du transfert obtenu pour le problème de consommation minimale. Ainsi, nous utilisons la connaissance a priori de ce transfert et nous en tirons les éléments de la subdivision et les largeurs  $\sigma$  des zones de poussées (la figure A.3 montre la trajectoire et la poussée obtenue pour le problème de consommation minimale pour  $F_{\max} = 10$  Newtons).

<sup>7</sup> mais pas de meilleures masses finales, celles-ci ayant été obtenues avec une subdivision uniforme

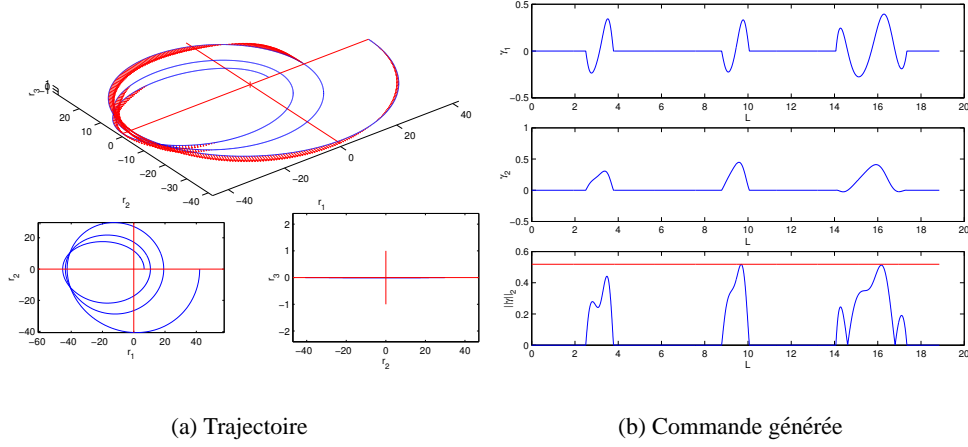


FIG. A.2 – Trajectoire pour  $F_{\max} = 60$  Newtons, subdivision non uniforme ( $R_x = 1, 4$ )

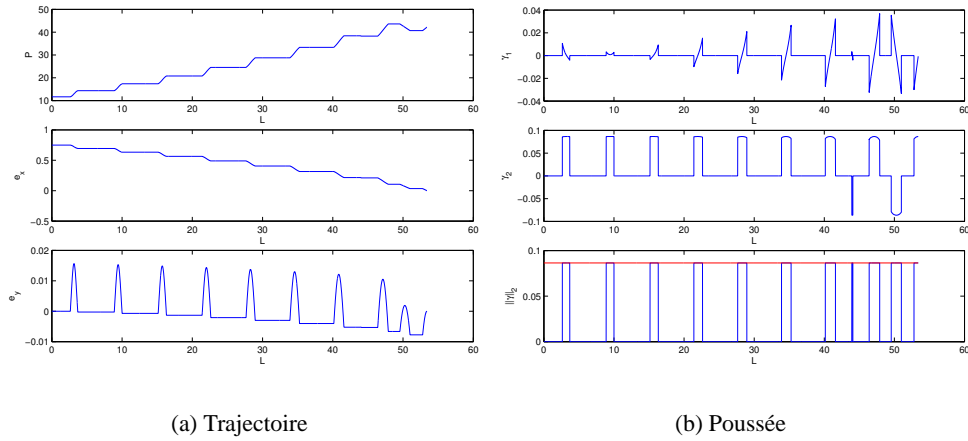


FIG. A.3 – Transfert à consommation minimale pour  $F_{\max} = 10$  Newtons

Nous essayons donc ici de reproduire la trajectoire. Le résultat est encourageant, mais malheureusement pas tout à fait concluant à cause de difficultés à satisfaire la contrainte de module maximum sur les dernières révolutions (la dernière notamment).

## Conclusion

Ces approches constructives donnent des résultats intéressants et constituent des méthodes très flexibles. En effet, si on change la cible  $x_f$  en cours de transfert,

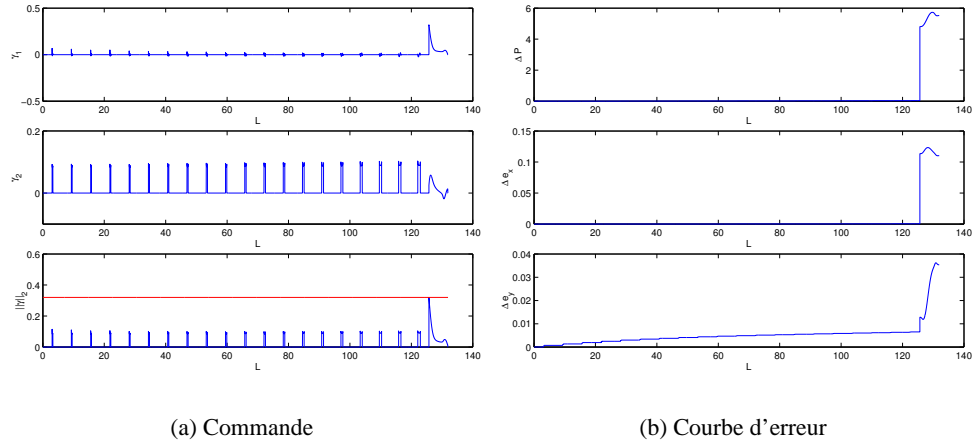


FIG. A.4 – Trajectoire pour  $F_{\max} = 60$  Newtons, subdivision non uniforme ( $R_x = 1,4$ )

quelques calculs simples peuvent remettre à jour les éléments de la subdivision.

Le mécanisme de génération de ces transferts a également permis de préciser (à défaut de la prouver) la nature de l'heuristique  $T \cdot F_{\max} \simeq \text{cste}$  :

**Proposition A.8.** *Sous des hypothèses convenables (cf. [31]), le produit  $T \cdot F_{\max}$  est minoré et majoré.*

La démonstration se trouve également dans [31].

# Liste des tableaux

3.1	Conditions initiales et finales . . . . .	33
3.2	Extrémales pour le temps minimum . . . . .	34
7.1	Algorithme de continuation . . . . .	64
7.2	Résolution de l'équation de tir pour les transferts bi-entrées . . . .	71
7.3	Suivi homotopique pour la continuation sur le domaine du contrôle	72
7.4	Suivi homotopique pour la continuation sur l'inclinaison initiale .	73
7.5	Comparaison des temps de transfert obtenus . . . . .	74
A.1	Algorithme général de construction . . . . .	88
A.2	Première forme implicite : résultats avec la subdivision uniforme .	89
A.3	Première forme implicite : quelques résultats avec la subdivision non uniforme . . . . .	90



# Table des figures

1.1	Orbites initiales et finales du transfert vers une orbite géostationnaire	14
2.1	Graphe de la fonction $u \mapsto - u  + au$ sur $[-1, 1]$	21
2.2	Caractérisation géométrique de $p(t)$ .	23
2.3	Point conjugué et champ central	25
3.1	Éléments orbitaux	28
3.2	Repère tangentiel-normal	29
3.3	Repère radial-orthoradial	30
3.4	Évolution du temps minimum $T$ en fonction de $1/F_{\max}$	35
3.5	Extrémale pour $F_{\max} = 6$ Newtons	36
3.6	Trajectoire pour $F_{\max} = 6$ Newtons	36
3.7	Commutations pour $F_{\max} = 6$ Newtons	37
4.1	Moyennation	44
4.2	Contact avec $e = 0$ (cas non-stationnaire)	49
4.3	Extrémales du problème moyenné	50
4.4	Domaines d'existence de solution optimale	51
5.1	Extrémales moyennée et non moyennées	54
5.2	Trajectoires moyennée et non moyennée	55
5.3	$(e_0, n_0) = (0.5, 0.2)$ , $(e_f, n_f) = (0.75, 0.5)$	55
5.4	$(e_0, n_0) = (0.5, 2.2)$ , $(e_f, n_f) = (0.75, 0.5)$	56
6.1	Continuation sur le domaine de contrôle.	60
6.2	Continuation sur l'inclinaison.	62
7.1	Évolution du temps de transfert $T$ en fonction de $F_{\max}$	66
7.2	Évolution du contrôle optimal (homotopie sur le domaine de contrôle)	67
7.3	Évolution du contrôle optimal (homotopie sur l'inclinaison initiale)	68
7.4	Évolution de la dernière valeur singulière (homotopie sur le domaine de contrôle, $l(T) = 62$ rad)	69
7.5	Évolution de la dernière valeur singulière (homotopie sur l'inclinaison initiale, $l(T) = 62$ rad)	70

A.1	Trajectoire pour $F_{\max} = 30$ Newtons, subdivision uniforme . . . .	90
A.2	Trajectoire pour $F_{\max} = 60$ Newtons, subdivision non uniforme ( $R_x = 1, 4$ ) . . . . .	91
A.3	Transfert à consommation minimale pour $F_{\max} = 10$ Newtons . . .	91
A.4	Trajectoire pour $F_{\max} = 60$ Newtons, subdivision non uniforme ( $R_x = 1, 4$ ) . . . . .	92



# Bibliographie

- [1] Andreï AGRACHEV and Yuri SACHKOV. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopædia of Mathematical Sciences*. Springer, 2004.
- [2] Andreï AGRACHEV and Mario SIGALOTTI. On the local structure of control functions corresponding to time-optimal trajectories in  $\mathbf{R}^3$ . *SIAM Journal On Control and Optimization*, 42(2) :513–531, 2003.
- [3] Andreï AGRACHEV, Gianni STEFANI, and Pierluigi ZEZZA. An invariant second variation in optimal control. *International Journal of Control*, 71(5) :689–715, Novembre 1998.
- [4] Andreï AGRACHEV, Gianni STEFANI, and Pierluigi ZEZZA. Strong optimality for a bang-bang trajectory. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 41(4) :991–1014, 2002.
- [5] Eugene ALLGOWER and Kurt GEORG. *Numerical continuation methods : an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [6] Vladimir ARNOLD. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1978. (Traduit en anglais de l’édition russe de 1974 par VOGTMANN et WEINSTEIN).
- [7] Michael BARTHOLOMEW-BIGGS, Laurence DIXON, S. HERSOM, and Z. MAANY. The solution of some difficult problems in low-thrust interplanetary trajectory optimization. *Optimal Control Applications and Methods*, 9(3) :229–251, 1988.
- [8] Régis BERTRAND and Richard EPENOV. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - Numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 23(4) :171–197, 2002.
- [9] Christian BISCHOF, Alan CARLE, George CORLISS, Andreas GRIEWANK, and Paul HOVLAND. AdiFOR - generating derivative codes from Fortran programs. *Scientific Programming*, 1(1) :1–29, 1992.
- [10] Bernard BONNARD. On singular extremals in the time-minimal control problem in  $\mathbf{R}^3$ . *SIAM Journal On Control and Optimization*, 23(5) :794–802, Septembre 1985.

- [11] Bernard BONNARD and Jean-Baptiste CAILLAU. Introduction to nonlinear optimal control. In Antonio LORÍA, Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, and Elena PANTELEY, editors, *Advanced topics in control systems theory*, volume 328 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter 1, pages 1–60. Springer, 2006. (Notes de cours de la Formation en Automatique de Paris 2005).
- [12] Bernard BONNARD and Jean-Baptiste CAILLAU. Riemannian metric of the averaged energy minimization problem in orbital transfer with low thrust. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, à paraître. (également rapport technique IRIT RT/APO/2006/01).
- [13] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Riemannian metric of the averaged controlled Kepler equation. In Francesca CERAGIOLI, Asen DONTCHEV, H. FURUTA, and Luciano PANDOLFI, editors, *Systems, Control, Modeling and Optimization*, volume 202 of *IFIP International Federation for Information Processing*, pages 79–89. Springer, 2005. Proceedings of 22<sup>nd</sup> IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization (July 18-22 2005, Turin, Italie).
- [14] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Averaging and optimal control of elliptic Keplerian orbits with low propulsion. *System and Control Letters*, 55(9) :755–760, Septembre 2006.
- [15] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Remarks on quadratic hamiltonians in spaceflight mechanics. In 3<sup>rd</sup> *IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, pages 287–290, Nagoya (Japan), 19-21 Juillet 2006. Université de Nagoya.
- [16] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Smooth approximations of single-input controlled keplerian trajectories : homotopies and averaging. In Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, Salah LAGHROUCHE, Antonio LORÍA, and Elena PANTELEY, editors, *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control*, pages 73–96, London, 2006. International Scientific & Technical Encyclopædia (ISTE). Proceedings of the CTS-HyCon Workshop on Nonlinear and Hybrid Control (July 10 - 12 2006, Paris IV Sorbonne, France).
- [17] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Averaging and optimal control of elliptic keplerian orbits with low propulsion. 5(W07) :20–25, 2007. Proceedings of 13<sup>th</sup> IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (April 26 - 28 2006, Cachan, France).
- [18] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Smooth homotopies for single-input time optimal orbital transfer. 5(W07) :26–31, 2007. Proceedings of 13<sup>th</sup> IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (April 26 - 28 2006, Cachan, France).
- [19] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Romain DUJOL. Energy minimization of single input orbit transfer by averaging and continuation.

- Bulletin des Sciences Mathématiques*, à paraître. Identifiant DOI : doi : 10.1016/j.bulsci.2006.03.005.
- [20] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Emmanuel TRÉLAT. Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, 5(4) :929–956, Novembre 2005.
- [21] Bernard BONNARD, Jean-Baptiste CAILLAU, and Emmanuel TRÉLAT. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, à paraître. Lien : <http://www.enseeiht.fr/apo/cotcot/>.
- [22] Bernard BONNARD and Monique CHYBA. *Singular trajectories and their role in control theory*, volume 40 of *Mathématiques et Applications*. Springer - SMAI, 2003.
- [23] Bernard BONNARD and Jérôme DE MORANT. Towards a geometric theory in the time-minimal control of chemical batch reactors. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 33(5) :1279–1311, September 1995.
- [24] Bernard BONNARD, Ludovic FAUBOURG, and Emmanuel TRÉLAT. *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, volume 51 of *Mathématiques et Applications*. Springer - SMAI, 2006.
- [25] Alberto BRESSAN. A high order test for optimality of bang-bang controls. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 23(1) :38–48, Janvier 1985.
- [26] Jean-Baptiste CAILLAU. *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Novembre 2000.
- [27] Jean-Baptiste CAILLAU, Romain DUJOL, Joseph GERGAUD, Thomas HABERKORN, Pierre MARTINON, Joseph NOAILLES, and Dorin PREDA. Mise au point d'une méthode de résolution efficace pour les problèmes de contrôle optimal à solution " bang-bang " : application au calcul de trajectoires à poussée faible. Technical Report 02/CNES/0257/00 - DPI 500, CNES-ENSEEIH, Octobre 2003. (Rapport intermédiaire de phase 2).
- [28] Jean-Baptiste CAILLAU, Romain DUJOL, and Joseph NOAILLES. Construction de transferts d'orbites sous-optimaux. In *12<sup>èmes</sup> Journées du groupe SMAI-MODE*, Le Havre (France), 25-27 Mars 2004. SMAI et Université du Havre.
- [29] Jean-Baptiste CAILLAU, Joseph GERGAUD, and Joseph NOAILLES. TfMin : Short reference manual. Technical Report RT/APO/01/3, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Juillet 2001. (Également Optimization Online Digest 2002/07/511). Lien : <http://www.enseeiht.fr/apo/tfmin/>.
- [30] Jean-Baptiste CAILLAU, Joseph GERGAUD, and Joseph NOAILLES. 3D geosynchronous transfer of a satellite : continuation on the thrust. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(3) :541–565, Septembre 2003.

- [31] Jean-Baptiste CAILLAU and Joseph NOAILLES. Planning of Keplerian trajectories. Technical Report RT/APO/03/2, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Avril 2003.
- [32] Lamberto CESARI. *Optimization theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [33] François CHAPLAIS. Averaging and deterministic optimal control. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 25(3) :767–780, Mai 1987.
- [34] Romain DUJOL. Construction de transferts d’orbites sous-optimaux. Rapport de stage de fin d’études d’ingénieur, École Nationale Supérieure d’Électronique, d’Électrotechnique, d’Informatique, d’Hydraulique et de Télécommunications de Toulouse, Toulouse (France), Juin 2003.
- [35] Erwin FEHLBERG. Low-order classical RUNGE-KUTTA formulas with step-size control and their application to some heat transfer problems. Technical Report R-315, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [36] Christophe FERRIER and Richard EPENY. Optimal control for engines with electro-ionic propulsion under constraint of eclipse. *Acta Astronautica*, 48(4) :181–192, Février 2001.
- [37] Sophie GEFFROY. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal, application aux problèmes de rendez-vous orbitaux à poussée faible*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Octobre 1997.
- [38] Sophie GEFFROY and Richard EPENY. Optimal low-thrust transfers with constraints – generalization of averaging techniques. *Acta Astronautica*, 41(3) :133–149, Août 1997.
- [39] Joseph GERGAUD. *Résolution numérique de problèmes de commande optimale à solution bang-bang par des méthodes homotopiques simpliciales*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Novembre 1989.
- [40] Joseph GERGAUD and Thomas HABERKORN. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12(2) :294–310, Avril 2006.
- [41] Thomas HABERKORN. *Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Octobre 2004.
- [42] Thomas HABERKORN, Pierre MARTINON, and Joseph GERGAUD. Low thrust minimum-fuel orbital transfer : a homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(6) :1046–1060, Novembre 2004.
- [43] Velimir JURDJEVIC. *Geometric control theory*. Cambridge University Press, Cambridge (Royaume-Uni), 1997.

- [44] Jirair KEVORKIAN and Julian COLE. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [45] Arthur KRENER. The high order principle and its applications to singular extremals. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 15(2) :256–293, Février 1977.
- [46] Ivan KUPKA. Generalized hamiltonians and optimal control : a geometric study of extremals. In *Proceedings of the 20th International Congress of Mathematicians*, University of Berkeley, California, USA, 1986. American Mathematical Society.
- [47] Cong Thanh LE. *Contrôle optimal et transfert orbital en temps minimal*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Novembre 1999.
- [48] E. LEE and Lawrence MARKUS. *Foundations of optimal control theory*. John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [49] Jean-Pierre MAREC. *Optimal space trajectories*. Elsevier, Amsterdam, 1979.
- [50] Pierre MARTINON. *Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse (France), Novembre 2005.
- [51] Helmut MAURER, Christof BÜSKENS, Jang-Ho KIM, and Yalcin KAYA. Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls. *Optimal Control Applications and Methods*, 26(3) :129–156, 2005.
- [52] Helmut MAURER and Nikolai OSMOLOVSKII. Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 42(6) :2239–2263, 2004.
- [53] Vinh NGUYEN, Hern Kuo SHAU, and Christian MARCHAL. Optimal time-free nodal transfers between elliptical orbits. *Acta Astronautica*, 17(8) :875–880, Août 1988.
- [54] Hans OBERLE and Klaus TAUBERT. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 95(2) :243–262, Novembre 1997.
- [55] Rémy PIENNE and Olivier TAYEG. Transfert optimal d’un satellite entre deux orbites keplériennes. Rapport de projet de deuxième année ENSEEIHT Informatique et Mathématiques Appliquées, Juin 2005.
- [56] Lev PONTRYAGIN, Vladimir BOLTYANSKII, Revaz GAMKRELIDZE, and E. MISHCHENKO. *Mathematical theory of optimal processes*. John Wiley & Sons, New York, 1962. (Traduit en anglais de l’édition russe de 1961 par TRIROGOFF).
- [57] Michael POWELL. A hybrid method for nonlinear equations. In Philip RABINOWITZ, editor, *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, pages 87–114. Gordon and Breach, Londres, 1970.

- [58] Andreï SARYCHEV. Sufficient optimality condition for pontryagin extremals. *System and Control Letters*, 19(6) :451–460, Décembre 1992.
- [59] Andreï SARYCHEV. First- and second-order sufficient optimality conditions for bang-bang controls. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 35(1) :315–340, Janvier 1997.
- [60] Heinz SCHÄTTLER. The local structure of time-optimal trajectories in dimension three under generic conditions. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 26(4) :899–918, Juillet 1988.
- [61] Heinz SCHÄTTLER. On the local structure of time-optimal bang-bang trajectories in  $\mathbf{R}^3$ . *SIAM Journal On Control and Optimization*, 26(1) :186–204, Janvier 1988.
- [62] Lawrence SHAMPINE, Herman WATTS, and S. DAVENPORT. Solving non-stiff ordinary differential equations : the state of the art. *SIAM Review*, 18(3) :376–411, Juillet 1976.
- [63] Gianni STEFANI and Pierluigi ZEZZA. Optimality conditions for a constrained optimal control problem. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 34(2) :635–659, Mars 1996.
- [64] Hector SUSSMANN. A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 17(5) :629–651, Septembre 1979.
- [65] Hector SUSSMANN. The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the general real analytic case. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 25(4) :868–904, Juillet 1987.
- [66] Hector SUSSMANN. The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the  $\mathcal{C}^\infty$  nonsingular case. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 25(2) :433–465, Mars 1987.
- [67] Layne WATSON. Numerical linear algebra aspects of globally convergent homotopy methods. *SIAM Review*, 28(4) :529–545, Décembre 1986.
- [68] Olivier ZARROUATI. *Trajectoires spatiales*. Cépaduès Éditions, Toulouse, 1987.

# Remerciements

En premier lieu, je voudrais bien évidemment remercier mon directeur de thèse, le professeur Joseph NOAILLES pour m’avoir successivement enchanté pendant ses cours d’Optimisation à l’E.N.S.E.E.I.H.T., fait confiance pour deux stages dont celui de D.E.A. et, cerise sur le gâteau, accueilli pour une thèse dans le groupe Contrôle Optimal. À Jean-Baptiste CAILLAU qui m’a suivi tout au long de ces trois années, merci pour sa patience, sa disponibilité, et pour être aussi rigoureux au sujet des mathématiques. . . qu’au sujet de la ponctualité.

Toute ma gratitude va à Bernard BONNARD, professeur à l’Université de Bourgogne, pour nous avoir fait profité de son expérience dans le domaine fourni du contrôle géométrique et pour son investissement indéniable et conséquent dans les travaux présentés ici. Merci pour m’avoir accueilli à Dijon à deux reprises.

Un grand merci à Andreï AGRACHEV et Ugo BOSCAIN pour leur accueil à Trieste pendant ces trois mois d’hiver, mais au bord de la mer. Je remercie aussi les autres étudiants que j’ai rencontrés là-bas. . . *Grazie mille e ciao a tutti.*

Je suis très reconnaissant à Monsieur Emmanuel TRÉLAT, professeur à l’Université d’Orléans et Monsieur Moritz DIEHL, professeur à l’Université Catholique de Leuven (Belgique) d’avoir accepté de relire mon manuscrit et de rapporter ce travail avec un délai relativement court compte tenu des contraintes qu’ils avaient déjà par ailleurs. Je remercie également Richard EPENY, Ingénieur au Centre National des Études Spatiales pour avoir relu avec attention mon manuscrit et pour nous avoir fourni le problème de transfert orbital, source intarissable de travaux plus passionnants les uns que les autres depuis près de vingt ans.

Je voudrais remercier l’équipe Algorithme Parallèles et Optimisation pour son accueil : Patrick AMESTOY, Ronan GUIVARC’H et Daniel RUIZ, et plus particulièrement le groupe Contrôle Optimal : Joseph GERGAUD d’une générosité et d’une abnégation évidente, mes “ grands frères ” de thèse Thomas HABERKORN et Pierre MARTINON avec qui j’ai eu de nombreuses discussions aussi bien mathématiques que non scientifiques, et la “ petite sœur ” récemment arrivée, Sandrine MOUYSET : « la pointe de finesse dans un monde de brutes ». Merci également aux colocataires successifs des bureaux F203 et I205 : Dorin PREDA et Ming CHAU. Merci également aux autres thésards des autres équipes pour ces déjeuners bien agréables qui nous permettaient d’échanger nos impressions et nos

informations : Aurélie, Pascaline, Ahmed, Bertrand, Christophe, Jean-Charles, Pierre-Loïc et Vincent.

Merci encore aux directeurs successifs du département Informatique et Mathématiques Appliquées, Alain AYACHE et Patrick SALLÉ, pour m'avoir fait confiance en tant que moniteur puis ATER dans les enseignements que j'ai effectués, ainsi qu'aux responsables des modules où j'ai eu la chance d'effectuer ma charge. Merci également à Marc PANTEL pour m'avoir permis de corriger les épreuves d'Informatique des Concours Communs Polytechniques. Un grand merci et une affectueuse pensée enfin pour tout le personnel administratif de l'E.N.S.E.E.I.H.T. et de l'I.N.P. qui font que le bateau " flotte mais ne coule jamais ".

Pour terminer, je voudrais remercier du fond du cœur toute ma famille, mes parents, mon frère, mes grands-parents et tous les autres pour m'avoir soutenu depuis le début. La famille a toujours eu une importance primordiale pour moi, c'est encore le cas aujourd'hui et ce le sera encore à l'avenir.



# Index

## A

AdiFOR.....34  
 algèbre de LIE .... voir LIE, algèbre  
 angle de la ligne des nœuds . voir pa-  
     ramètres orbitaux, angle de  
     la ligne des nœuds  
 angle du périégée ..... voir pa-  
     ramètres orbitaux, argument  
     du périégée  
 anomalie vraie ..... voir paramètres  
     orbitaux, anomalie vraie  
 apogée.....35  
 application exponentielle . **24**, 26, 42  
 application extrémité.....**21**  
 application extrêmité.....24  
 argument du périégée..... voir pa-  
     ramètres orbitaux, argument  
     du périégée

## B

bang-bang .....**31**, 32  
 BC-extrémale ..... **18**

## C

cas anormal.....46–47  
 cas normal.....**24**, 42  
 champ central.....**25**, 26  
 champ de JACOBI.....**24**  
     vertical ..... 24  
 chemin homotopique.....60  
     régularité ..... 62  
     suivi ..... 65  
 coefficient d'éjection des gaz .... 33  
 commutation  
     instants .....35  
     surface ..... 19

condition de LEGENDRE ..... 23  
     forte.....23  
 constante de gravitation terrestre voir  
     gravitation terrestre, constante  
 continuation  
     de l'énergie vers la masse 15, 18  
     sur la poussée..... 15, 33  
     sur le paramètre de moyennation  
         54  
     vers le transfert mono-entrée .60  
         sur l'inclinaison initiale 61–62  
         sur le domaine de contrôle60–  
             61  
 contrôlabilité .....31  
 COTCOT ..... 33, 68  
 critère  
     maximisation de la masse 14, 41  
     minimisation de l'énergie ... 15,  
         41–50  
     minimisation du temps... 14, 41  
 crochet de LIE .... voir LIE, crochet  
*cut locus* ..... voir lieu de coupure  
*cut point* ..... voir point de coupure

## D

dérivée seconde intrinsèque.....24  
 distribution.....41  
 domaine elliptique.....**28**, 30

## E

ellipse  
     demi-grand axe.....28  
     excentricité ... voir excentricité,  
         norme  
     osculatrice..... 14, 54  
 énergie

- critère voir critère, minimisation de l'énergie  
intégrale première . voir système de KEPLER, intégrales premières  
ensemble accessible ..... 21  
équation aux variations ..... 22, 24  
équation de JACOBI ..... **24**  
équation de tir ..... voir tir, équation  
état adjoint ..... **17**, 54  
interprétation géométrique ... 22  
excentricité  
norme ..... 28  
vecteur ..... **27**, 29  
existence  
classification des extrémales moyennées  
50  
théorème de FILIPOV ..... 32  
extrémale ..... **18**
- F**
- fonction de tir ..... voir tir, fonction
- G**
- gravitation terrestre ..... 13  
constante ..... 13, 33
- H**
- Hamiltonien  
pseudo-Hamiltonien ..... **17**  
définition générale ..... 17  
maximisation de la masse . 20  
minimisation de l'énergie . 19, 43  
minimisation du temps .... 19  
vrai Hamiltonien ..... **18**  
définition générale ..... 18  
minimisation de l'énergie . 20, 43  
minimisation du temps .... 19  
moyenné ..... 43, 45  
heuristique  $T \cdot F_{\max} \simeq \text{cste}$  33, 34, 92
- I**
- inclinaison voir paramètres orbitaux, inclinaison
- intégrale de LAPLACE . voir système de KEPLER, intégrales premières  
intégrateur RKF45 ..... 34  
inverse multiforme ..... 48
- K**
- KEPLER... voir système de KEPLER
- L**
- LAPLACE voir intégrale de LAPLACE  
LIE  
algèbre ..... 31, 41, 46, 47  
crochet ..... 31, 46  
lieu conjugué ..... 42  
lieu de coupure ..... 42  
longitude .. voir paramètres orbitaux, longitude
- M**
- méthode de tir ..... voir tir, méthode  
méthode indirecte .. voir principe du maximum  
métrique ..... 41  
métrique moyennée ..... 46  
coplanaire ..... 46  
forme plate ..... 47, 54  
forme polaire ..... 47  
modèle  
à masse constante ..... 13  
à masse variable ..... 13  
moment cinétique... voir système de KEPLER, intégrales premières  
mouvement  
circulaire ..... 28, 30  
uniforme ..... 27  
elliptique ..... 27  
moyennation ..... 14, **42–50**
- O**
- orbite  
géostationnaire ..... 13, 54
- P**
- paramètres orbitaux ..... 14, **28**  
angle de la ligne des nœuds .. 28

anomalie vraie . . . . . 28, 30, 44  
 argument du périégée . . . . . 28  
 argument du périégée . . . . . 30  
 inclinaison . . . . . 28  
 longitude . . . . . 28  
     cumulée . . . . . 30  
     vraie voir paramètres orbitaux,  
         anomalie vraie  
 mouvement moyen . . . . . 29  
 périégée . . . . . 35  
     argument . . . . . voir pa-  
         ramètres orbitaux, argument  
         du périégée  
 point conjugué . . . . . 23, 26, 42, 68  
     algorithme de calcul . . . . . 26  
     caractérisation géométrique . 24,  
         26  
     définition . . . . . **24**  
 point de coupure . . . . . 42  
 poussée faible . . . . . 13  
 principe du maximum . . . **17–18**, 41  
     condition de maximisation . . 18  
     conditions de transversalité . 18  
     version faible . . . . . 22  
 pseudo-Hamiltonien . . voir Hamilto-  
     nien, pseudo-Hamiltonien

## R

repère  
     radial-orthoradial . . . . . 29, 79  
     tangential-normal . . . . . 29, 59  
 Riemannien . . . . . 41, 42

## S

solveur HYBRD . . . . . 34  
 sous-Riemannien . . . . . 41, 42, 44  
 stratification (des trajectoires) . . . 19  
 surface de commutation . . . . . voir  
     commutation, surface  
 système de KEPLER  
     contrôlé . . . . . 13, 53  
     intégrales premières . . . . . 27  
     libre . . . . . 27

## T

TfMin . . . . . 33  
 tir  
     équation . . . . . 18, 26, 54  
     fonction . . . . . 26  
     méthode . . . . . 18, 33, 43  
 transfert orbital . . . . . **13–15**  
     coplanaire . . . . . **28**, 29, 46, 79  
     mono-entrée . . . . . **29**, 46

## V

vecteur adjoint . . . . . voir état adjoint  
 vecteur excentricité voir excentricité,  
     vecteur  
 vrai Hamiltonien . . voir Hamiltonien,  
     vrai Hamiltonien

**Résumé** Nous présentons ici l'étude d'un problème de mécanique spatiale, le transfert en temps minimal vers une orbite géostationnaire. Plus précisément, nous nous intéressons à un cas particulier : le transfert mono-entrée. Reprenant les méthodes et les résultats des études précédentes, le transfert mono-entrée optimal est calculé et montre des performances excellentes compte tenu des contraintes supplémentaires introduites sur la direction de la poussée. Le contrôle optimal étant discontinu, nous introduisons deux approximations lisses. Nous considérons tout d'abord une approximation Riemannienne avec la moyennation du transfert en minimum d'énergie avec relaxation de la contrainte sur le contrôle : l'étude de la métrique Riemannienne associée montre que, dans des coordonnées adaptées, les trajectoires optimales vers les orbites circulaires sont des droites. Nous relierons ensuite le transfert mono-entrée à des transferts bi-entrées contraints mais lisses et utilisons les conditions lisses du deuxième ordre sur ces approximations : cette procédure nous permet notamment de valider l'efficacité de la méthode du tir simple sur le transfert mono-entrée.

**Mots-clés** transfert d'orbite mono-entrée, contrôle en temps minimal, points conjugués, moyennation, continuation

**Classification  $\mathcal{AMS}$  (MSC2000)** 49K15, 70Q05

---

**Abstract** We deal with a problem from celestial mechanics, namely the minimum-time orbit transfer towards a geostationary orbit. More precisely, we are concerned with the particular case of single-input transfer. Using results and methods from previous studies, the optimal single-input transfer is computed and we observe excellent results given the additional constraints on the thrust direction in this case. Since the optimal control is discontinuous, we introduce two smooth approximations. First, we consider a Riemannian approximation relying on the averaged minimum-energy transfer without constraint on the control : the analysis of the underlying metric shows that, in suitable coordinates, optimal trajectories towards circular orbits are straight lines. Then we connect the single-input transfer to constrained and yet smooth double-input transfers and we apply smooth second-order optimality conditions to these approximations : this process validates the efficiency of the single-shooting method on the single-input transfer.

**Keywords** single-input orbit transfer, minimum-time control, conjugate points, averaging, continuation

**$\mathcal{AMS}$  Classification (MSC2000)** 49K15, 70Q05

---